บทที่ ๒

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหาในบทนี้เป็นการนำเสนอผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่ ผลงานวิจัยที่จะกล่าวอ้างถึงนั้นจะเกี่ยวข้องกับการรบกวนวงโคจรของดาวเทียม โดยทั้งในแง่ของผลที่เกิดจากความไม่กลมของโลก และฝุ่นอวกาศ

นอกจากประเด็นในข้างต้นแล้ว เนื่องจากโครงการวิจัยนี้ ได้นำเสนอการนำสัญญาณจีพีเอสมาใช้งานเป็นข้อมูลการวัด ดังนั้นจำเป็นที่จะต้องกล่าวอ้างถึงผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องสัญญาณจีพีเอส โดยเฉพาะในส่วนของการนำสัญญาณเฟสความแตกต่างระหว่างคลื่นพาห์ที่รับได้จากสายอากาศสองชุดมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียม ซึ่งสัญญาณเฟสความแตกต่างดังกล่าวที่วัดได้นั้น จะได้ค่าเฉพาะค่าเศษเท่านั้น แต่จำนวนเต็มของลูกคลื่นสัญญาณความแตกต่างไม่สามารถวัดได้โดยเครื่องรับ ทำให้ปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาหลักในการนำสัญญาณเฟสความแตกต่างมาใช้งาน

๒.๑ งานวิจัยด้านผลของการรบกวนวงโคจรโลกต่ำเนื่องจากความไม่กลมของโลก

๒.๑.๑ ฟังก์ชันการรบกวนเนื่องจากความไม่กลมของโลก

King-Hele [King-Hele, 1958] ได้นำเสนอผลงานศึกษาวิจัยความไม่กลมของโลกที่มีผลต่อวงโคจรดาวเทียมต่ำ โดยสมการเชิงวิเคราะห์ที่นำเสนอได้มีการพิจารณาจนถึงเทอมที่ 4 (J_4) ของฮาร์มอนิกสนามโน้มถ่วงเข้าไว้ด้วย นอกจากนี้ข้อมูลวงโคจรของดาวเทียม Sputnik 1 และ Sputnik 2 (ที่ได้จากการประมวลผลจากการตรวจจับและติดตามสัญญาณวิทยุที่ส่งออกมาโดย Sputnik ทั้งสองดวง) ได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลทางทฤษฎี โดยพบว่าความแตกต่างในค่าค่าเฉลี่ยของอัตราการเปลี่ยนแปลงของระนาบวงโคจร ($d\Omega/dt$) ระหว่างข้อมูลที่วัดได้กับผลทางทฤษฎีมีนัยสำคัญ ทำให้ได้ข้อสรุปว่าจะต้องมีการพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ของฮาร์มอนิกสนามโน้มถ่วงใหม่

Brouwer [Brouwer, 1959] และ Kozai [Kozai, 1959] ได้นำเสนอสมการเชิงวิเคราะห์สำหรับชุดตัวแปรวงโคจรที่รวมผลของการรบกวน โดยมีรายละเอียดของงานวิจัยดังนี้

Brouwer ใช้วิธีของ von Zeipel [Vinti, 1998] ในการแก้ปัญหาเนื่องจากความไม่กลมของโลก โดยพิจารณาฟังก์ชันสนามโน้มถ่วงถึงฮาร์มอนิกที่ 5 (J_5) สมการเชิงวิเคราะห์ถูกแยกออกเป็น 2 เทอม โดยที่เทอมแรกแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาสั้นๆ มีตัวแปร mean anomaly (M) ปรากฏอยู่ ในขณะที่เทอมที่สองแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่ยาว มีชุดของตัวแปร argument of perigee (ω) ปรากฏอยู่ ถึงแม้ว่าเทอมทั้งสองมีตัวแปรค่าความเยื้องศูนย์กลาง (e: eccentricity) ปรากฏอยู่ในพจน์ของตัวหาร แต่ Brouwer ได้กล่าวอ้างว่าในการคำนวณของพิกัดตำแหน่ง ตัวแปร M และ ω ไม่จำเป็นที่จะต้องแยกจากกัน ซึ่งทำให้ไม่มีการหารด้วย e แต่เนื่องจากทฤษฎีของ Brouwer ได้ใช้ตัวแปร Delaunay ทำให้สมการเชิงวิเคราะห์มีภาวะเอกฐานในกรณีที่ e และ ค่ามุมเอียง (i: inclination angle) มีค่าเท่ากับศูนย์ นอกจากนี้สมการเชิงวิเคราะห์ของ Brouwer มีข้อจำกัด ไม่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับวงโคจรที่มีค่ามุมเอียงใกล้ค่ามุมวิกฤต 63.4 องศา โดยสมการดังกล่าวสามารถใช้ได้กับวงโคจรใดที่มีค่า $e < 1$ และ มุมเอียงค่าใดๆ ยกเว้นที่มุมวิกฤต

Kozai [Kozai, 1959]ได้นำเสนอสมการเชิงวิเคราะห์ที่รวมผลการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาสั้นๆในรูปแบบสมการอันดับที่หนึ่งเท่านั้น ส่วนผลการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่ยาวและการรบกวนแบบ secular แสดงในรูปแบบสมการอันดับสอง การวิเคราะห์อยู่ภายใต้สมมุติฐานให้การกระจายความหนาแน่นของโลกเป็นแบบสมมาตร โดยรวมผลฮาร์มอนิกที่ 4 (J_4) จากผลการวิเคราะห์พบว่าสม

การเชิงวิเคราะห์ที่นำเสนอมีภาวะเอกฐานในกรณีที่ค่าความเยื้องศูนย์กลาง e หรือ ค่ามุมเอียง i มีค่าน้อยกว่าปริมาณของอันดับที่หนึ่ง อย่างไรก็ตามในเทอมของ semi-major axis ไม่มีเทอมอันดับที่หนึ่งของการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่ยาว

ในการแก้ไขปัญหาของภาวะเอกฐานที่เกิดจากกรณีค่า e มีค่าน้อยๆ Kozai [Kozai, 1961]ได้นำเสนอการจัดรูปแบบสมการเชิงวิเคราะห์ใหม่ โดยทำการแทนที่ตัวแปร e ω และ M ด้วยเทอม (e cos ω) (e sin ω) และ ($M+\omega$) ตามลำดับ (สองเทอมแรกเป็นระบบพิกัด modified equinoctial coordinates สำหรับเทอมที่สามเป็น argument of latitude) เพื่อขจัดตัวแปร e ออกจากพจน์ตัวหารของสมการเชิงวิเคราะห์ใหม่

Cook [Cook, 1966] ได้ศึกษาแนวทาง Kozai พร้อมกับชี้ให้เห็นว่า ฟังก์ชันการรบกวนแบบ zonal สามารถแสดงในรูปแบบที่สะดวกต่อการจัดรูปสมการ โดยละเลยเทอมการเปลี่ยนแปลงสำหรับช่วงเวลาที่สั้นๆ พร้อมกับขยายสมการของ Kozai จนถึงอันดับเลขคี่ใดๆของ zonal harmonics สำหรับอันดับเลขคู่ มีเพียงเทอม J_2 เท่านั้นที่พิจารณา

Merson [Merson, 1961] นำเสนอสมการเชิงวิเคราะห์ที่รวมเทอมที่ 6 (J_6) ของฮาร์มอนิกสนามโน้มถ่วง พร้อมกับชี้ให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง สมาชิกสัมผัสประชิด (osculating elements) และ สมาชิกเฉลี่ย (mean elements) นอกจากนี้ Merson ได้ให้ความเห็นว่า แนวทางเชิงวิเคราะห์ที่ง่ายที่สุดในการแก้ไขปัญหาการเคลื่อนที่ของดาวเทียมสามารถทำได้โดยการใช้สมาชิกสัมผัสประชิด ซึ่งไม่มีความซับซ้อน ง่ายต่อความเข้าใจ และ ได้มีการใช้งานมายาวนานในงานวิจัยด้านดาราศาสตร์ อย่างไรก็ตาม สมาชิกสัมผัสประชิดมีความไม่เหมาะสมกับการที่จะนำมาใช้งานกับกรณีวงโคจรโลกต่ำ เนื่องจากขนาดของการแกว่งกวัด (oscillation) มีค่ามาก และ เทอม ω มีตัวแปร e ปรากฏในพจน์ของตัวหาร ทำให้การจัดรูปสมการมีความยุ่งยากสำหรับวงโคจรแบบใกล้เคียงวงกลม อย่างไรก็ตามแนวทางที่ Merson นำเสนอ ถือว่าเป็นแนวทางแรกที่อธิบายฟังก์ชันแรงรบกวนด้วยสมาชิกสัมผัสประชิด ดังนั้นในสมการเชิงวิเคราะห์ยังคงปรากฏตัวแปร e ในพจน์ของตัวหาร

Kozai [Kozai, 1962] พิจารณาการรบกวนแบบรายคาบอันดับที่สองพร้อมกับการรบกวนแบบ secular อันดับที่ 3 ที่มีต่อการเคลื่อนที่ของดาวเทียม โดยใช้วิธีของ von Zeipel แรงโน้มถ่วงของโลกถูกจำลองด้วยอนุกรมของ zonal harmonics โดยสมมุติให้เทอม J_2 มีขนาดประมาณอันดับที่หนึ่ง ในขณะที่ J_3 และ J_4 เป็นอันดับที่สอง และ J_5, J_6, J_7 และ J_8 เป็นอันดับที่สาม เทอมที่ใช้แสดงถึงการรบกวนสำหรับช่วงเวลาสั้นๆ ประกอบด้วยตัวแปรรัศมีของวงโคจร มุมเอียง argument of latitude และ longitude of asecending node ในขณะที่เทอมที่ใช้แสดงถึงการรบกวนสำหรับช่วงเวลาที่ยาว

นาน ประกอบด้วยสมาชิกของเคปเลอร์ เนื่องจาก Kozai ได้รวมผลฮาร์มอนิกจนถึงเทอมที่ 8 ส่งผลให้สมการเชิงวิเคราะห์มีความยาวมาก

สำหรับการแก้ไขปัญหากรณีที่สมการเชิงวิเคราะห์ของ Brouwer มีภาวะเอกฐานเมื่อค่า e และ i มีค่าเท่ากับศูนย์นั้น Lyddane [Lyddane, 1963] ได้นำเสนอการแก้ไขปัญหา โดยการใช้ชุดตัวแปรชุดใหม่ในระบบพิกัดที่แปลงจากชุดตัวแปรเดิม ทำให้สมการเชิงวิเคราะห์สามารถให้คำตอบสำหรับกรณีวงโคจรที่มีค่า e และ i ค่าน้อยๆได้ อย่างไรก็ตามระบบพิกัดใหม่ที่นำเสนอโดย Lyddane มีความคล้ายกับระบบพิกัดที่นำเสนอโดย Kozai [Kozai, 1961]

Hoots [Hoots, 1981] ได้นำเสนอการจัดรูปแบบการแปลงที่นำเสนอโดย Lyddane ใหม่ เพื่อให้การคำนวณหาค่าตำแหน่งและความเร็วสามารถทำได้โดยการใช้ตัวดำเนินการทางพีชคณิตและตรีโกณมิติเพียงบางตัวเท่านั้น Hoots ทำการกำหนดชุดของตัวแปรใหม่ที่เรียกว่า สมาชิกตำแหน่ง ซึ่งสะดวกต่อการจัดรูปแบบของการแปลงที่นำเสนอโดย Lyddane และมีความรวดเร็วในการคำนวณ อีกทั้งไม่มีข้อจำกัดในเรื่องของค่า e และ i

Gooding [Gooding, 1991] [Gooding, 1992] ได้นำเสนอสมการเชิงวิเคราะห์สมบรูณ์แบบสำหรับค่า e ในรูปสมการการรบกวนอันดับที่หนึ่ง

๒.๑.๒ แบบจำลองความไม่กลมของโลก

จากงานวิจัยที่กล่าวมาในข้างต้น การจำลองฟังก์ชันการรบกวนเนื่องจากความไม่กลมของโลกเป็นประเด็นที่สำคัญมาก การศึกษาวิจัยเฉพาะด้านแบบจำลองดังกล่าวมีดังต่อไปนี้

Musen [Musen, 1960] นำเสนอวิธีสำหรับการคำนวณหา tesseral / sectorial harmonics ของสนามโน้มถ่วงโลก ซึ่งมีความถูกต้องตลอดช่วงเวลาที่ยาวนาน ในขณะที่ Blitzer [Blitzer *et al.*, 1962] ศึกษาวิจัยผลของการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลายาวนานเนื่องจาก tesseral harmonics โดยเฉพาะเทอมฮาร์มอนิกที่ 2 (J_{22}) ผลจากการวิจัยพบว่าการรบกวนที่มีขนาดใหญ่ส่งผลต่อวงโคจรดาวเทียมที่มีคาบเวลา 24 ชั่วโมง เนื่องจากความไม่สมมาตรบริเวณรอบเส้นศูนย์สูตร ดังนั้นตำแหน่งของดาวเทียมค้างฟ้าที่ส่วนใหญ่เป็นดาวเทียมสื่อสารจะต้องอยู่บนเส้นศูนย์สูตรที่กำหนดให้ Cook [Cook, 1963] นำเสนอแบบจำลองสำหรับการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลายาวนานเนื่องจาก tesseral harmonics โดยรวมเทอมฮาร์มอนิกที่ 4 เข้าไว้ด้วย โดยไม่มีข้อจำกัดในค่า e และ i

Blitzer [Blitzer, 1965] ได้ทำการศึกษาวิจัยเพิ่มเติม โดยพิจารณาผลของ tesseral harmonics ตลอดย่านสเปคตรัมสำหรับวงโคจรที่มีคาบเวลา 24 ชั่วโมง และที่มีค่า e และ i น้อยๆ เมื่อพิจารณาเฉพาะเทอมฮาร์มอนิกที่ 2 (J_{22}) พบว่าตำแหน่งของดาวเทียมค้างฟ้าที่เป็นไปได้มี 4 ตำแหน่ง ที่สมมาตรกันอยู่บนเส้นหลักของวงรีที่อยู่บริเวณเส้นศูนย์สูตร โดยที่ 2 ตำแหน่งที่อยู่บนเส้น minor-axis จะมีเสถียรภาพ ส่วนอีก 2 ตำแหน่งไม่มี นอกจากนี้ Blitzer ยังพบว่าเมื่อรวมผลของฮาร์มอนิกอันดับสูงๆ ความสมมาตรที่เคยปรากฏอยู่จะหายไป และตำแหน่งที่เสถียรภาพอยู่บริเวณรอบๆตำแหน่งเดิม

Garfinkel [Garfinkel, 1965] ได้ศึกษาวิจัยสมการการเคลื่อนที่ของดาวเทียมที่รวมผล tesseral harmonics ของสนามโน้มถ่วงโลก โดยใช้วิธีของ von Zeipel ในการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลายาวนาน ในรูปแบบของตัวแปร mean motion และความเร็วเชิงมุม ผลจากการศึกษาพบว่า อัตราส่วนของความเร็วเชิงมุมต่อ mean motion จะมีขนาดอยู่ระหว่างค่า J_2 และ 1 นอกจากนี้ยังพบว่าเรโซแนนซ์จะเกิดขึ้นเมื่อค่า mean motion และค่าความเร็วเชิงมุมมีค่าใกล้เคียงกัน

[Gedeon *e. al.*, 1967]ทำการศึกษาวิจัยผลของที่มีต่อค่า e จากผลจากการศึกษาพบว่าคาบเวลาที่มีค่าเป็นสัดส่วนใกล้เคียงกับคาบเวลาการหมุนของโลก จะมีผลต่อการเกิดเรโซแนนซ์ นอกจากนี้ Gedeon [Gedeon, 1969] ยังได้ศึกษาสเปคตรัมทั้งหมดของวงโคจรเทียบกับผลของเรโซแนนซ์

[Dallas and Diehl, 1977]ได้พัฒนาสมการเชิงวิเคราะห์สำหรับการเคลื่อนที่ของดาวเทียมในวงโคจรที่รวมผลของฮาร์มอนิกอันดับที่สองของ sectorial harmonics โดยใช้วิธีของ von Zeipel และใช้ตัวแปร Delaunay ในการแสดงรูปสมการ เมื่อเปรียบเทียบกับสมการของ Brouwer สมการของ Dallas ได้รวมผลของ sectorial harmonics เข้าไปในสมการการรบกวนอันดับที่หนึ่ง

Kaula [Kaula, 1966] นำเสนอรูปสมการการรบกวนอันดับที่หนึ่งสำหรับกรณีทั่วไป นอกจากนี้ Kaula ยังได้ทำการแปลง spherical harmonic potential ในเทอมของสมาชิกเคปเลอร์ โดยการใช้ฟังก์ชันของ e และ i พร้อมกับแก้สมการดังกล่าวโดยใช้รูปแบบสมการ Lagrange's planetary equation

๒.๒ งานวิจัยด้านผลของการรบกวนวงโคจรโลกต่ำเนื่องจากฝุ่นอวกาศ

การศึกษาวิจัยเชิงการวิเคราะห์ที่ได้กล่าวมาในข้างต้น ได้สร้างคุณประโยชน์ในการหาตำแหน่งวงโคจรของดาวเทียม อย่างไรก็ตามผลลัพธ์ที่ได้มีข้อจำกัด เนื่องจากการศึกษาวิจัยดังกล่าวไม่ได้รวมผลที่

เกิดจากฝุ่นอวกาศ ซึ่งรบกวนการเคลื่อนที่ของดาวเทียมโดยเฉพาะในวงโคจรโลกต่ำ งานวิจัยที่โดดเด่นทางด้านฝุ่นอวกาศที่มีผลต่อวงโคจรดาวเทียมมีดังนี้

Brouwer และ Hori [Brouwer and Hori, 1961] ได้ศึกษาวิจัยเพิ่มเติมจากงานวิจัยเดิม [Brouwer, 1959] โดยได้รวมผลของฝุ่นอวกาศที่มีผลต่อวงโคจร จากผลการวิจัยชิ้นนี้ทำให้เกิดการจุดประกายงานวิจัยในเรื่องผลของฝุ่นอวกาศ โดยเฉพาะผลงานศึกษาวิจัยโดย King-Hele [King-Hele, 1987] ซึ่งอาจจะกล่าวได้ว่าเป็นผลงานวิจัยที่มีการอ้างอิงกันอย่างกว้างขวาง ในบทความวิจัยของ King-Hele ได้รวบรวมผลการศึกษาในเรื่องดังกล่าว โดยสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี คือ (1) ในสภาพชั้นบรรยากาศที่มีความสมมาตรในลักษณะของทรงกลม (2) ในสภาพชั้นบรรยากาศที่ไม่เป็นทรงกลม และ (3) ในสภาพที่ความหนาแน่นเปลี่ยนแปลงไปตามความสูง

Hoots และ France [Hoots and France, 1987] นำเสนอสมการเชิงวิเคราะห์ที่อธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเทียม ภายใต้ผลการรบกวนเนื่องจากสนามโน้มถ่วงและฝุ่นอวกาศ ผลของการรบกวนโดยสนามโน้มถ่วงในรูปแบบของ zonal harmonics ถูกพิจารณาถึงเทอม J_4 ในขณะที่พลวัตของฝุ่นอวกาศถูกพิจารณาด้วย

๒.๓ งานวิจัยด้านการนำข้อมูลการวัดจีพีเอสมาใช้งานด้านวงโคจร

LandSat 4 เป็นดาวเทียมยุคแรกๆในวงโคจรโลกต่ำ ที่นำสัญญาณจีพีเอสมาใช้ในการคำนวณหาตำแหน่งของดาวเทียม โดยมีความผิดพลาดประมาณ 20 เมตร [Fang and Seifert, 1985] ภายใต้การเงื่อนไขที่สามารถรับสัญญาณได้ดีภายในช่วงเวลาสั้นๆ หลังจากนั้นดาวเทียมในรุ่นต่อๆมา ได้มีการใช้งานสัญญาณจีพีเอสอย่างแพร่หลาย [Unwin, 1995] โดยมีรูปแบบการใช้ข้อมูลสัญญาณจีพีเอสอยู่สองแบบ แบบแรกเป็นการใช้ข้อมูลที่เก็บโดยตัวดาวเทียมเอง (direct GPS) เป็นข้อมูลดิบในการประมวลผล สำหรับแบบที่สอง ได้มีการนำข้อมูลสัญญาณจีพีเอสที่เก็บโดยสถานีภาคพื้นดินหลายๆสถานีมารวมกับข้อมูลบนดาวเทียม (differential GPS) มาใช้ในการประมวลผลเพื่อลดความผิดพลาดลง [Yunck *et al.*, 1985] แบบจำลองพลวัตของเป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อความถูกต้อง ได้มีการนำเสนอนำข้อมูลทางกายภาพของกลุ่มดาวเทียมจีพีเอสที่ถูกเลือกในการรับสัญญาณมาวิเคราะห์เพื่อให้สามารถปรับแบบจำลองพลวัตได้ถูกต้องแม้ว่าบางช่วงเวลาไม่มีข้อมูลการวัด [Wu *et al.*, 1991] ความผิดพลาดของสัญญาณจีพีเอสเป็นอีกประเด็นหนึ่งที่ต้องพิจารณาเพื่อให้ได้ผลถูกต้องมากที่สุด [Parkinson, 1996]

๒.๓.๑ การคำนวณหาจำนวนลูกคลื่นพาห์ของข้อมูลการวัดเฟสความแตกต่าง

การนำข้อมูลการวัดค่าความแตกต่างทางเฟสระหว่างสัญญาณพาห์ ที่รับจากสายอากาศสองชุดที่วางอยู่ห่างกันมาใช้งานจะประสบปัญหา ถ้าระยะห่างระหว่างสายอากาศสองชุดดังกล่าวมีค่ามากกว่าค่าความยาวคลื่นพาห์ (ความแตกต่างทางเฟสสูงสุดมีค่าเท่ากับระยะห่างระหว่างสายอากาศสองชุดดังกล่าว) เนื่องจากเครื่องรับสัญญาณจีพีเอสจะให้ค่าความแตกต่างทางเฟส $-\pi$ ถึง $+\pi$ เรเดียน หรือ สมมูลกับ $-\lambda/2$ ถึง $+\lambda/2$ ในหน่วยของระยะทาง (λ เป็นค่าความยาวคลื่นพาห์) โดยที่ค่าจำนวนเต็มลูกคลื่นพาห์ไม่สามารถให้ได้ โดยปัญหาดังกล่าวถูกเรียกว่า “integer ambiguity problem”

ประเด็นที่ควรพิจารณาเพิ่มเติม ดังในกรณีที่ค่าความแตกต่างทางเฟสมีค่าเข้าใกล้ขอบค่าของ $-\pi$ ถึง $+\pi$ เรเดียน หรือ สมมูลกับ $-\lambda/2$ ถึง $+\lambda/2$ ความผิดพลาดที่เกิดจากสัญญาณรบกวน อาจจะส่งผลให้ค่าจำนวนเต็มลูกคลื่นพาห์ดังกล่าวสลิปไปเป็นค่าอื่นได้ ซึ่งทำให้ความยากของงานวิจัยเพิ่มสูงขึ้น

ในอดีตที่ผ่านมา ได้มีการนำเสนอเทคนิคการสืบค้นจำนวนเต็ม (ambiguity search) และเทคนิคที่อาศัยการเคลื่อนที่ (motion –based technique) เพื่อหาค่าจำนวนเต็มลูกคลื่นพาห์

เทคนิคการสืบค้นจำนวนเต็มใช้หลักการสืบค้นหาเซตของจำนวนเต็มที่ทำให้ค่าความแตกต่างระหว่างข้อมูลการวัดจริงและค่าประมาณมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งนำเสนอใน [Martin-Neira *et al.*, 1995] [Quinn, 1993] วิธีดังกล่าวใช้ข้อมูลการวัดแบบ double-phase difference (ผลต่างของค่าความแตกต่างทางเฟส)เพื่อทำการขจัดค่าออฟเซทที่ปรากฏอยู่ในข้อมูลการวัด(ความแตกต่างทางเฟส) พร้อมกับทำการลดปริภูมิการสืบค้น นอกจากนี้ Knight ได้นำเสนอการใช้ข้อมูลการวัดแบบ single-phase difference (ซึ่งก็คือค่าความแตกต่างทางเฟส) พร้อมกับการใช้การประมาณค่าแบบความควรจะเป็นสูงสุด (maximum-likelihood) เพื่อทำให้ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของข้อมูลการวัดมีค่าสูงสุด [Knight, 1994]

สำหรับเทคนิคที่อาศัยการเคลื่อนที่ใช้หลักการการประมวลข้อมูลที่ถูกเก็บไว้ในช่วงระยะเวลาหนึ่งและตั้งสมมุติฐานให้ค่าจำนวนเต็มลูกคลื่นพาห์ยังคงมีค่าคงที่ในช่วงระยะเวลาดังกล่าว การนำเสนอเทคนิคนี้ในครั้งแรก Brown และ Ward ได้ใช้ตัวคูณลากรานจ์เป็นตัวที่ทำให้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ (ของความผิดพลาดในข้อมูลการวัด) มีค่าน้อยที่สุด พร้อมกับทำการหาการวางตัวของเบสไลน์ วิธีดังกล่าวได้ถูกทดสอบบนพื้นโลก โดยใช้เบสไลน์เดี่ยวติดตั้งบนระบบที่อยู่กับที่และเคลื่อนที่หมุนแบบช้าๆ [Brown and Ward, 1990] อย่างไรก็ตาม วิธีนี้มีข้อด้อยภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ค่าจำนวนเต็มลูกคลื่นพาห์ในขณะที่ระบบมีการเคลื่อนที่

เทคนิคของ Brown และ Ward ได้ถูกนำมาปรับปรุงโดยเฉพาะกับการประยุกต์ใช้งานกับดาวเทียม โดย Cohen [Cohen, 1992] ได้นำเสนอสามวิธีได้แก่ platform motion, SV motion และ quasi-static motion โดยสองวิธีหลังได้ถูกนำไปใช้งานบนอุปกรณ์ทดสอบ “GANE experiment” [Lightsey, 1997] ที่ถูกนำส่งขึ้นไปในอวกาศโดยกระสวยอวกาศ ผลของการทดสอบพบว่าวิธี quasi-static motion ปรากฏว่าจะมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าวิธี SV motion อย่างไรก็ตามวิธี quasi-static motion ยังมีข้อด้อยอยู่หลายประการ อาทิเช่น ต้องการค่าการวางตัวเริ่มต้น อีกทั้งด้วยการประมวลผลของวิธีเป็นแบบทำซ้ำ ซึ่งคำตอบอาจจะไม่ลู่เข้าถ้าค่าเริ่มต้นที่ให้มีค่าไม่ถูกต้อง

Conway และคณะ [Conway *et al.*, 1996] ได้นำเสนอวิธีที่ใช้เทคนิคที่อาศัยการเคลื่อนที่โดยการทำให้มุมออยเลอร์ที่ปรากฏอยู่ในฟังก์ชันจุดประสงค์ (ของความผิดพลาดในข้อมูลการวัด) ให้มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งวิธีดังกล่าวได้ทำการทดสอบกับเฮลิคอปเตอร์จำลองที่มีสายอากาศจีพีเอส 4 ชุดติดตั้งอยู่ อย่างไรก็ตาม ก่อนทำการบินจำเป็นที่จะต้องให้ค่าการวางตัวเริ่มต้นแก่ระบบก่อน

Crassidis และคณะ [Crassidis *et al.*, 1999] ได้นำเสนอวิธีที่ใช้เทคนิคที่อาศัยการเคลื่อนที่โดยระบุว่าไม่จำเป็นที่จะต้องทราบค่าการวางตัวเริ่มต้น ซึ่งวิธีดังกล่าวมีการประมวลผลเป็นแบบลำดับขั้นโดยใช้หลักการการประมาณค่าแบบความควรจะเป็นสูงสุด อย่างไรก็ตามวิธีดังกล่าว มีข้อจำกัดต้องใช้เบสไลน์สายอากาศจำนวน 3 เบสไลน์ที่มีการวางตัวไม่เป็นแบบร่วมระนาบ (non-coplanar) จากการทดสอบกับระบบจำลองสำหรับดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำ ได้ผลลัพธ์ที่ดีมาก