

# บทที่ ๓

## ความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่จำเป็นต่องานวิจัย

เนื้อหาในบทนี้เป็นการนำเสนอความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่จำเป็นต่องานวิจัย ซึ่งเกี่ยวข้องโดยตรงกับกลศาสตร์วัตถุท้องฟ้า (celestial mechanics) ที่กล่าวถึงพื้นฐานของสมการที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเทียมรอบโลกหรือดาวเคราะห์ และ รวมไปถึงศักยภาพในแง่ของโลกรอบวงโคจรดาวเทียม

ในการคำนวณเพื่อหาตำแหน่งวงโคจรของดาว จำเป็นที่จะต้องอ้างอิงกับระบบพิกัดและเวลา ดังนั้นการนำเสนอเรื่องระบบพิกัดและเวลา จึงเป็นเนื้อหาพื้นฐานที่จำเป็นส่วนหนึ่งที่นักวิจัยควรจะศึกษา และกำหนดให้ชัดเจน รวมไปถึงการแปลงระบบพิกัด ซึ่งมีความซับซ้อนในเชิงกายภาพ อีกทั้งก่อให้เกิดความสับสนและผิดพลาดได้ง่าย

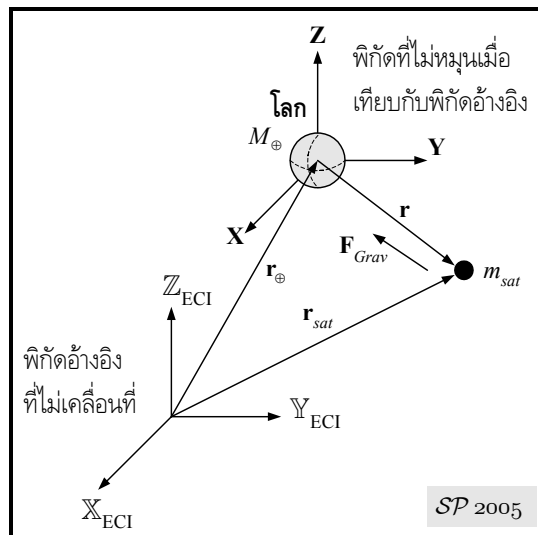
เนื่องจากโครงการวิจัยนี้ ได้นำเสนอการนำสัญญาณจีพีเอสมาใช้งานเป็นข้อมูลการวัด ดังนั้นจำเป็นต้องกล่าวถึงระบบจีพีเอสในส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ทั้งในแง่ของสัญญาณรหัสและสัญญาณพาหุ รวมไปถึงปัจจัยที่ส่งผลต่อความถูกต้องของการวัดสัญญาณจีพีเอส

**๓.๑ กลศาสตร์วัตถุท้องฟ้า**

**๓.๑.๑ สมการการเคลื่อนที่ของดาวเทียมโคจรรอบโลก**

การเคลื่อนที่ของดาวเทียมรอบโลก (หรือดาวเคราะห์) อธิบายได้โดยใช้กฎแรงดึงดูดระหว่างมวลของนิวตัน (Newton’s universal law of gravitation) อันหนึ่งเพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ จำเป็นที่จะต้องกำหนดสมมุติฐานเพื่อรองรับสมการคณิตศาสตร์ที่จะนำเสนอ โดยสมมุติฐานมีดังนี้

๑. วัตถุทั้งสอง (โลกและดาวเทียม) มีลักษณะเป็นทรงกลมที่สมมาตร
๒. พิจารณาไม่มีแรงภายนอกและภายใน กระทำต่อระบบนอกจากแรงดึงดูดระหว่างมวล



รูปที่ ๓.๑ ภาพของแรงดึงดูดระหว่างมวลของวัตถุสองชิ้น

จากรูปที่ ๓.๑ แรงที่เกิดจากสนามโน้มถ่วงโลก  $\mathbf{F}_{Grav}$  ที่กระทำต่อตัวดาวเทียม สามารถแสดงได้

$$\mathbf{F}_{Grav} = -\frac{GM_{\oplus}m_{sat}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{3.1.1}$$

โดยที่  $G$  เป็นค่าคงที่ของความโน้มถ่วง,  $M_{\oplus}$  เป็นมวลของโลก,  $m_{sat}$  เป็นมวลของดาวเทียม

$\mathbf{r}$  เป็นเวกเตอร์ของระยะระหว่างโลกและดาวเทียม โดยมีทิศชี้ไปที่ดาวเทียม

$r$  เป็นระยะขจัดของเวกเตอร์  $\mathbf{r}$

จากสมการข้างต้น เครื่องหมายลบแสดงถึงแรง  $\mathbf{F}_{Grav}$  มีทิศตรงข้ามกับแรงโน้มถ่วงของโลก ในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของดาวเทียม เริ่มต้นด้วยการพิจารณาเวกเตอร์ตำแหน่งของโลก  $\mathbf{r}_{\oplus}$  และเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเทียม  $\mathbf{r}_{sat}$  เมื่อเทียบกับระบบพิกัดอ้างอิง ดังแสดงในรูปที่ ๓.๑ ดังนั้นเวกเตอร์ของระยะระหว่างโลกและดาวเทียม  $\mathbf{r}$  สามารถแสดงได้เป็น

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_{\oplus} \quad (3.1.2)$$

จากการกำหนดให้ระบบพิกัดอ้างอิงเป็นระบบพิกัดที่ไม่เคลื่อนที่ ทำให้การอนุพันธ์สมการข้างต้นสามารถทำได้โดยไม่ต้องพิจารณาการอนุพันธ์ในแต่ละแกนของระบบพิกัด ดังนั้นอนุพันธ์อันดับที่สองของเวกเตอร์  $\mathbf{r}$  แสดงถึงความเร่งของดาวเทียมเมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางของโลก

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_{sat} - \ddot{\mathbf{r}}_{\oplus} \quad (3.1.3)$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน ซึ่งกล่าวถึงความเร่ง  $a$  ของวัตถุมวล  $m$  ใดๆจะมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น หรือมีค่าเป็นสัดส่วนผกผันกับมวลของวัตถุนั้น

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \equiv m\ddot{\mathbf{r}} \quad (3.1.4)$$

พิจารณาแรงที่เกิดจากศักย์โน้มถ่วงโลก  $\mathbf{F}_{\oplus}$  และ  $\mathbf{F}_{Grav}$  โดยแสดงตามสมการการเคลื่อนที่

$$\mathbf{F}_{\oplus} = M_{\oplus}\ddot{\mathbf{r}}_{\oplus} \equiv \frac{GM_{\oplus}m_{sat}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_{\oplus} = \frac{Gm_{sat}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{F}_{Grav} = m_{sat}\ddot{\mathbf{r}}_{sat} \equiv -\frac{GM_{\oplus}m_{sat}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_{sat} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.1.6)$$

แทนสมการ (3.1.5) และ สมการ (3.1.6) ลงในสมการ (3.1.3)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_{\oplus} + m_{sat})}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.1.7)$$

โดยที่  $\mu$  เป็นพารามิเตอร์ของความโน้มถ่วง (gravitational parameter)

$$\mu = G(M_{\oplus} + m_{sat}) \quad (3.1.8)$$

เมื่อพิจารณาตามความเป็นจริงพบว่ามวลของดาวเทียมมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับมวลของโลก ทำให้พารามิเตอร์ของศักราชโน้มถ่วง สามารถพิจารณาได้เป็นค่าความโน้มถ่วงของโลกได้ตามสมการ

$$\mu = G(M_{\oplus} + m_{sat}) \approx GM_{\oplus} \quad (3.1.9)$$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ (3.1.8) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_{\oplus}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = 0 \quad (3.1.10)$$

โดยที่  $\mu_{\oplus} = GM_{\oplus} = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$

### ๓.๑.๒ ศักราชโน้มถ่วงโลก

จากหัวข้อ ๓.๑.๑ โลกถูกสมมุติให้เป็นมวลทรงกลมที่มีลักษณะสมมาตร ซึ่งในความเป็นจริงแล้วไม่ได้เป็นเช่นนั้น ดังนั้นในการคำนวณหาตำแหน่งวงโคจรของดาวเทียมที่โคจรรอบโลกนั้น จำเป็นที่จะต้องนำรูปพรรณสัณฐานของโลกมาพิจารณาด้วย โดยที่แบบจำลองรูปพรรณสัณฐานของโลกก็จะสะท้อนถึงลักษณะความโน้มถ่วงของโลกด้วย ซึ่งโดยข้อเท็จจริงแล้วมวลสารของโลกมีการกระจายอย่างไม่สม่ำเสมอ อีกทั้งรูปทรงของโลกเองมีลักษณะไม่เป็นทรงกลม ปัจจัยเหล่านี้ทำให้สนามแรงโน้มถ่วงของโลกมีความซับซ้อนและมีลักษณะไม่เป็นทรงกลม ซึ่งส่งผลให้การคำนวณหาตำแหน่งของดาวเทียมที่โคจรรอบโลกมีความผิดพลาดไปด้วยถ้าไม่นำผลความไม่กลมของโลกเข้ามาพิจารณาร่วมด้วย ดังนั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องสร้างสมการศักราชโน้มถ่วงของโลก

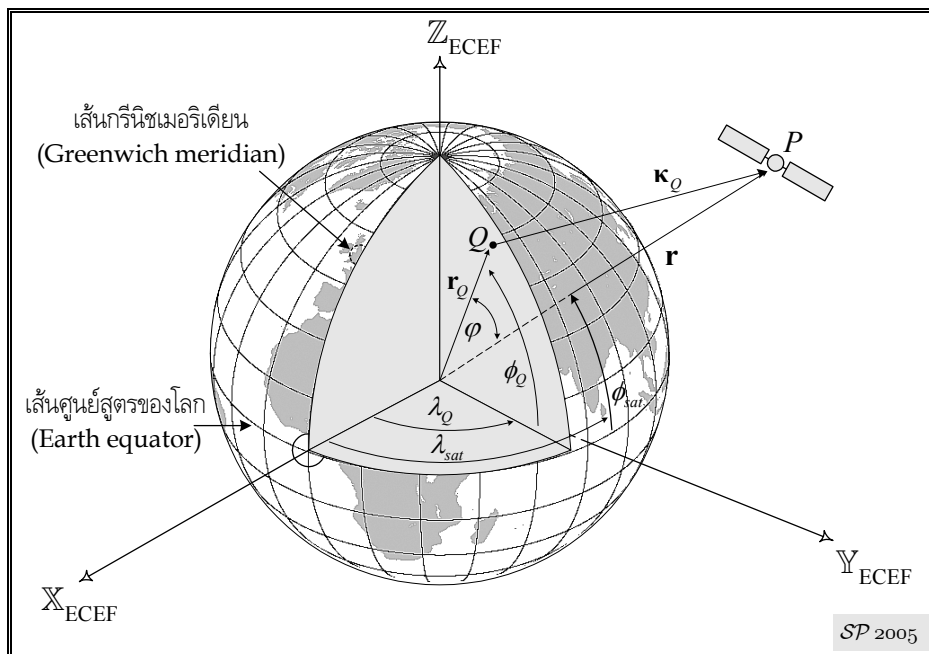
พิจารณามวลเล็กๆเป็นจำนวนอนันต์ที่รวมตัวกันเป็นก้อนวัตถุ (อาทิเช่น โลก) โดยสมมุติให้  $dM_{\oplus}$  เป็นมวลขนาดเล็กมากๆ ณ จุด Q พิกัด  $(\xi, \eta, \zeta)$  ดังแสดงในรูปที่ ๓.๒ ค่าศักราชโน้มถ่วงต่อหน่วยน้ำหนักที่กระทำต่อดาวเทียมที่ตำแหน่ง P พิกัด  $(x, y, z)$  สามารถพิจารณาได้จากผลรวมของศักราชโน้มถ่วงที่เกิดจากแต่ละมวลเล็กๆ ดังกล่าว โดยจากข้อเท็จจริง ถึงแม้ว่าโลกจะประกอบด้วยมวลเล็กๆเป็นจำนวนอนันต์นั้น แต่มวลเล็กๆจำนวนมากมายเหล่านั้นได้กระจายอยู่ภายในตัวของวัตถุหรือโลกซึ่งล้วนแต่มีขนาดที่ชัดเจน จากข้อพิจารณาดังกล่าว เราสามารถที่จะคำนวณหาค่าศักราชโน้มถ่วงทั้งหมดได้จากการผลรวมของศักราชโน้มถ่วงที่เกิดจากแต่ละมวลเล็กๆเหล่านั้นโดยทำการอินทิเกรตสมการข้างต้นภายใต้เงื่อนไขของการอินทิเกรตทั้งวัตถุ (โลก) ซึ่งแสดงได้ตามสมการ [Vinti, 1998] [Vallado, 1997] [Wertz, 1978] [Tapley *et al.*, 2004]

$$U = -G \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} \frac{\rho_{\oplus}}{\kappa_Q} d\xi d\eta d\zeta \equiv -G \oint_{body} \frac{1}{\kappa_Q} dM_{\oplus} \quad (3.1.11)$$

โดยที่  $U$  เป็นฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงที่รวมผลของความเร่งรบกวนที่เกิดจากวัตถุที่ไม่เป็นทรงกลม

$G$  เป็นค่าคงที่แรงโน้มถ่วงสากล,  $\rho_{\oplus}$  เป็นความหนาแน่นของโลกที่เกี่ยวข้องกับมวล  $dM_{\oplus}$   
 $\kappa_Q$  เป็นระยะระหว่างจุด  $Q$  และตำแหน่งดาวเทียม

$$P: \kappa_Q = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$



รูปที่ ๓.๒ การพิจารณาศักย์โน้มถ่วงที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของดาวเทียม

ประเด็นสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างแบบจำลองศักย์โน้มถ่วงโลก จะอยู่ที่การพิจารณาระยะ  $\kappa_Q$  ซึ่งการหาค่าระยะ  $\kappa_Q$  ดังกล่าวจำเป็นต้องใช้กฎของโคซายน์

$$\kappa_Q^2 = r^2 + r_Q^2 - 2rr_Q \cos(\varphi) \Rightarrow \kappa_Q = r\sqrt{1 - 2\alpha \cos(\varphi) + \alpha^2} \quad (3.1.12)$$

โดยที่  $r$  เป็นระยะระหว่างพิกัดตำแหน่งดาวเทียม  $P(x, y, z)$  และ จุดศูนย์กลางโลก

$r_Q$  เป็นระยะระหว่างพิกัดตำแหน่งตำแหน่งของมวลเล็กๆ  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  และ จุดศูนย์กลางโลก

$\varphi$  เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์  $\mathbf{r}$  และ  $\mathbf{r}_Q$  ซึ่ง  $\cos(\varphi)$  มีค่าน้อยกว่า หรือ เท่ากับ 1.0 เสมอ

$\alpha = (r_Q/r)$  ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 1.0 เสมอ สำหรับตำแหน่ง  $P$  ใดๆที่อยู่นอกโลก

ฟังก์ชันโคซายน์ของมุม  $\varphi$  คำนวณได้จาก

$$\cos(\varphi) = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{rr_0} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{rr_0} \quad (3.1.13)$$

เมื่อได้สมการของระยะ  $\kappa_0$  แล้ว คักย์โน้มถ่วงตามสมการ (3.1.11) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$U = -G \oint_{body} \frac{1}{r\sqrt{1-2\alpha \cos(\varphi) + \alpha^2}} dM_{\oplus} \quad (3.1.14)$$

จากสมการข้างต้น เทอม  $(1/\sqrt{1-2\alpha \cos(\varphi) + \alpha^2})$  เป็นกฎแกลสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างสมการคักย์โน้มถ่วงของโลก ซึ่งสามารถสร้างได้จากสองแนวทาง

แนวทางที่หนึ่ง ใช้วิธีเชิงเรขาคณิตของ MacCullagh ที่มีข้อดีในแง่ของสมการที่ได้มานั้นจะอยู่ในรูปแบบของอินเนอร์เซียโมเมนต์ ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากในการวิเคราะห์การรบกวน อีกทั้งสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการสำหรับดวงจันทร์และดาวเคราะห์ดวงอื่นๆ เนื่องจากเทอมย่อยของสมการ MacCullagh ยังคงมีเทอมอินทิกรัลอยู่ [Brouwer and Clemence, 1961, หน้า 118 - 128] [Vallado, 1997, หน้า 488 - 489] จึงจำเป็นที่จะต้องทราบการกระจายมวลของโลก เพื่อทำการแก้สมการ ถ้าเราสมมติให้ค่าขนาดของโลกและการกระจายความหนาแน่นที่มีความถูกต้องในระดับหนึ่ง เราก็สามารถหาค่าคักย์โน้มถ่วงได้ อย่างไรก็ตามค่าที่ได้จะเป็นค่าประมาณ ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าสมการของ MacCullagh เป็นการอธิบายถึงแบบจำลองคักย์โน้มถ่วงในลักษณะการประมาณ นอกจากนี้ Vinti [Vinti, 1998, หน้า 147] ได้กล่าวถึงสมการของ MacCullagh ว่าเหมาะสำหรับอธิบายและใช้งานในประเด็นปัญหาที่เกิดจากการส่าย (precession) และการกวัด (nutation) ของโลก แต่สำหรับในแง่ของวงโคจรดาวเทียมแล้ว สมการของ MacCullagh อาจจะไม่เหมาะที่จะนำมาใช้งาน

สำหรับแนวทางที่สองนั้น เราสามารถใช้การกระจายฮาร์มอนิกแบบทรงกลม (spherical harmonic expansion) ซึ่งมีความซับซ้อนในการสร้างแบบจำลอง แต่จะมีประโยชน์อย่างมากโดยเฉพาะสำหรับการวิเคราะห์ผลของการรบกวนวงโคจรดาวเทียม

### ๓.๑.๒.๑ แบบจำลองคักย์โน้มถ่วงของโลก ในรูปแบบฮาร์มอนิกทรงกลม

จากสมการ (3.1.14) พิจารณาใช้ทฤษฎีบททวินามทำการขยายเทอมส่วนของสมการดังกล่าว โดยให้อยู่ในรูปแบบของอนุกรมพหุนามเลอจองด์ร์ (Legendre polynomial) จากนั้นนำทฤษฎีบท

ส่วนเพิ่มเติมสำหรับพหุนามเลอจองด์ (addition theorem for Legendre's polynomial) มาใช้ในการกระจายเทอมพหุนามเลอจองด์ของฟังก์ชัน ( $\cos \varphi$ ) พร้อมกับจัดรูปสมการขึ้นใหม่ โดยพิจารณาอ้างอิงกับระบบพิกัด  $(r, \phi_{sat}, \lambda_{sat})$  ดังนั้นสมการศักย์โน้มถ่วงโลกที่ได้จากฮาร์มอนิกทรงกลมแสดงได้ตามสมการ

$$U = -\frac{\mu_{\oplus}}{r} + \wp(r, \phi_{sat}, \lambda_{sat}) \quad (3.1.18)$$

โดยที่  $\wp(r, \phi_{sat}, \lambda_{sat})$  เป็นการกระจายฮาร์มอนิกทรงกลมเพื่อแก้ไขศักย์โน้มถ่วงโลกสำหรับการกระจายมวลที่ไม่สม่ำเสมอ ซึ่งแสดงได้ตามสมการ [Wertz, 1978, หน้า 124]

$$\begin{aligned} \wp(r, \phi_{sat}, \lambda_{sat}) = & \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_n(\sin \phi_{sat}) \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \phi_{sat}) \{C_{n,m} \cos(m\lambda_{sat}) + S_{n,m} \sin(m\lambda_{sat})\} \right] \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

โดยที่  $(\phi_{sat}, \lambda_{sat})$  เป็นพิกัดแลททิจูดและลองจิจูดของตำแหน่งดาวเทียม

$n$  เป็นระดับชั้นพหุนามเลอจองด์ และ  $m$  เป็นอันดับพหุนามเลอจองด์

$P_{n,m}$  เป็นฟังก์ชันเลอจองด์สมทบ (associated Legendre function)

$J_n$  เป็นสัมประสิทธิ์โซนอลฮาร์มอนิก (zonal harmonics)

$C_{n,m}$  และ  $S_{n,m}$  เป็นสัมประสิทธิ์เทสเซลฮาร์มอนิก (tesseral harmonics) เมื่อ  $n \neq m$

$C_{n,m}$  และ  $S_{n,m}$  เป็นสัมประสิทธิ์เซกทอเรียลฮาร์มอนิก (sectorial harmonics) เมื่อ  $n = m$

ดังนั้นสมการศักย์โน้มถ่วงโลกสำหรับการกระจายมวลที่ไม่สม่ำเสมอแสดงได้เป็น [Vallado, 1997, หน้า 492]

$$\begin{aligned} U(r, \phi_{sat}, \lambda_{sat}) = & -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_n(\sin \phi_{sat}) \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \phi_{sat}) \{C_{n,m} \cos(m\lambda_{sat}) + S_{n,m} \sin(m\lambda_{sat})\} \right] \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

เมื่อวิเคราะห์สมการศักย์โน้มถ่วงโลก พบว่าพจน์ที่สองภายในวงเล็บ “[ ]” ซึ่งมีสัมประสิทธิ์  $J_n$  บรรจุกอยู่ เป็นเทอมของโซนอนัลฮาร์โมนิก ซึ่งเทอมโซนอนัลฮาร์โมนิกนี้จะขึ้นอยู่กับพิกัดแลททิจูด ( $\phi_{sat}$ ) เท่านั้น โดยเป็นผลเนื่องมาจากความไม่กลมของโลก ในขณะที่พจน์ที่สามแสดงถึงเทอมเทสเซลฮาร์โมนิก เมื่อ  $n \neq m$  และ เทอมเซกทอเรียลฮาร์โมนิก เมื่อ  $n = m$

สำหรับดาวเทียมสำรวจโลกที่โคจรในวงโคจรโลกต่ำ โซนอนัลฮาร์โมนิกเป็นแหล่งรบกวนวงโคจรดาวเทียมที่มีขนาดใหญ่ที่สุด โดยจะส่งผลกระทบต่อคาบเวลาโคจร (orbital period) ระยะในทิศทางลองทิจูดของจุดไต่ขึ้น (longitude of ascending node) และ ระยะมุมของจุดใกล้โลก (argument of perigee)

**๓.๑.๒.๒ นิยามเพิ่มเติมสำหรับแนวทางฮาร์โมนิกทรงกลม**

เพื่อความสะดวกในการอธิบายสมการศักย์โน้มถ่วง สัมประสิทธิ์  $C_{n,m}$  และ  $S_{n,m}$  จะถูกแสดงในรูปของสัมประสิทธิ์ฮาร์โมนิก  $J_{n,m}$  และ ลองจิจูดสมดุล (equilibrium longitude)  $\lambda_{n,m}$  สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ฮาร์โมนิก  $J_{n,m}$  โดยใช้ความสัมพันธ์ [Blitzer, 1970, หน้า 19]

$$C_{n,m} = J_{n,m} \cos m\lambda_{n,m} \quad ; \quad S_{n,m} = J_{n,m} \sin m\lambda_{n,m} \quad (3.1.21)$$

ศักย์โน้มถ่วงโลกตามสมการ (3.1.20) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น [Blitzer, 1970, หน้า 19]

$$U(r, \phi_{sat}, \lambda_{sat}) = -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_n(\sin \phi_{sat}) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{n,m} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \phi_{sat}) \cos m(\lambda - \lambda_{n,m}) \right] \quad (3.1.22)$$

จากสมการข้างต้น ศักย์โน้มถ่วงโลก จะประกอบด้วยเทอม

$$U_{zonal} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_n(\sin \phi_{sat}) \right] \quad (3.1.23-1)$$

$$U_{tesseral\_sectorial} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{n,m} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \phi_{sat}) \cos m(\lambda - \lambda_{n,m}) \quad (3.1.23-2)$$



- ◆ โชนอลฮาร์โมนิก ( $m = 0$ ) : เมื่อ  $m = 0$  ส่งผลให้ศักย์โน้มถ่วงบนแนวลองจิจูดจะหายไป เมื่อพิจารณาเทอมพหุนามพหุนามเลขชี้กำลัง  $P_n(\sin \phi_{sat})$  จะพบว่าลักษณะฮาร์โมนิกจะอยู่ในแนวเส้นที่จุดและสมมาตรรอบๆ แกนขั้วโลก โดยมีค่าบวกลบสลับกันไป
- ◆ เทสเซลฮาร์โมนิก ( $n \neq m$ ) : เทอมพหุนามเลขชี้กำลังสมทบ  $P_{n,m}(\sin \phi_{sat})$  แสดงลักษณะฮาร์โมนิกแบบสี่เหลี่ยมด้านเท่าคล้ายกับกระดานหมากรุก โดยมีค่าบวกลบสลับกันไป
- ◆ เซกทอเรียลฮาร์โมนิก ( $n = m$ ) : เทอมพหุนามพหุนามเลขชี้กำลังสมทบ  $P_{n,n}(\sin \phi_{sat})$  แสดงลักษณะฮาร์โมนิกในแนวลองจิจูด ซึ่งมีค่าบวกลบสลับกันไป และมีค่าเป็นศูนย์เฉพาะที่ขั้วโลก

## ๓.๒ ระบบพิกัด และ ระบบเวลา

### ๓.๒.๑ ระบบพิกัด

ในการอธิบายวงโคจรของดาวเทียม สิ่งแรกที่จะต้องพิจารณาก็คือการกำหนดระบบพิกัดเพื่อใช้ในการอ้างอิงสำหรับอธิบายวงโคจรดังกล่าว

การกำหนดระบบพิกัดอ้างอิง ประกอบด้วย

#### 1. กำหนดจุดกำเนิด (origin) ของระบบพิกัด

ประเภทของระบบพิกัดแบ่งออกได้ตามลักษณะของจุดกำเนิด

ก) ระบบพิกัดที่ใช้วัตถุที่พิจารณาเป็นจุดกำเนิด

ข) ระบบพิกัดที่ใช้จุดศูนย์กลางมวลเป็นจุดกำเนิด

ค) ระบบพิกัดหมุนที่ใช้จุดศูนย์กลางมวลเป็นจุดกำเนิด

#### 2. กำหนดระนาบหลักมูล (fundamental plane) ของระบบพิกัด

#### 3. กำหนดทิศของแกนमुखสำคัญ (direction of principal axis) ของระบบพิกัด

การกำหนดทิศแกนमुखทั้งสามแกนของระบบพิกัด จะเป็นตามกฎมือขวา โดยแกนमुखทั้งสามแกนจะต้องตั้งฉากซึ่งกันและกัน (orthogonal)

### ระนาบหลักมูล

ระนาบหลักมูลที่ใช้งานในงานวิจัย จะมีอยู่สองแบบ

- ◎ ระนาบเส้นศูนย์สูตรโลก : เป็นระนาบที่อยู่ในแนวเส้นศูนย์สูตรโลกและตั้งฉากกับแกนหมุนของโลก โดยทิศบวกจะอยู่ในทิศทางของเวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของการหมุน
- ◎ ระนาบวงโคจรดาวเทียม : เป็นระนาบที่ถูกกำหนดโดยการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น โดยทิศบวกจะอยู่ในทิศทางของเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม สำหรับในกรณีที่ใช้ในการวิเคราะห์เรื่องการรบกวน ระนาบที่นำมาใช้งานจะเป็นระนาบเฉลี่ยที่มีการจัดการสั้นของระนาบในลักษณะตามคาบเวลาออกไปเสียก่อน

### ทิศของแกนमुखสำคัญ

ทิศของแกนमुखสำคัญที่ใช้งานในงานวิจัย จะมีอยู่สองแบบ

- ◎ กรีนิช หรือ ไพร์ เมอร์ริเดียน : เป็นระนาบเมอร์ริเดียนของโลกที่ผ่านหอดูดาวที่เมืองกรีนิช ประเทศอังกฤษ
- ◎ เวอนอล อีควิน็อกซ์ : เป็นจุดที่ตัดกันระหว่างระนาบวงโคจรของโลก (ecliptic) และระนาบเส้นศูนย์สูตรโลกที่ขยายออกไป สังเกตได้ว่าดวงอาทิตย์จะปรากฏบนตำแหน่งตัดกันของระนาบทั้งสองเป็นจำนวนสองครั้งในรอบปี โดยตำแหน่งดังกล่าวถูกเรียกว่า อีควิน็อกซ์ (equinox) ซึ่งมีความสำคัญทางดาราศาสตร์คือ ทำให้ช่วงเวลากลางวันและช่วงเวลากลางคืนมีคาบเวลาเท่ากัน

เมื่อดวงอาทิตย์ปรากฏขึ้นที่ตำแหน่งอีควิน็อกซ์ ในทิศทางการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์จากซีกโลกใต้ไปสู่ซีกโลกเหนือ ตำแหน่งอีควิน็อกซ์ดังกล่าวถูกเรียกว่า เวอนอล อีควิน็อกซ์ (vernal equinox,  $\Upsilon$ ) โดยวันดังกล่าวจะถือว่าเป็นวันแรกของฤดูใบไม้ผลิ (ประมาณวันที่ 21 มีนาคม)

#### ๓.๒.๑.๑ ระบบพิกัดที่พิจารณาโลกเป็นฐานอ้างอิง

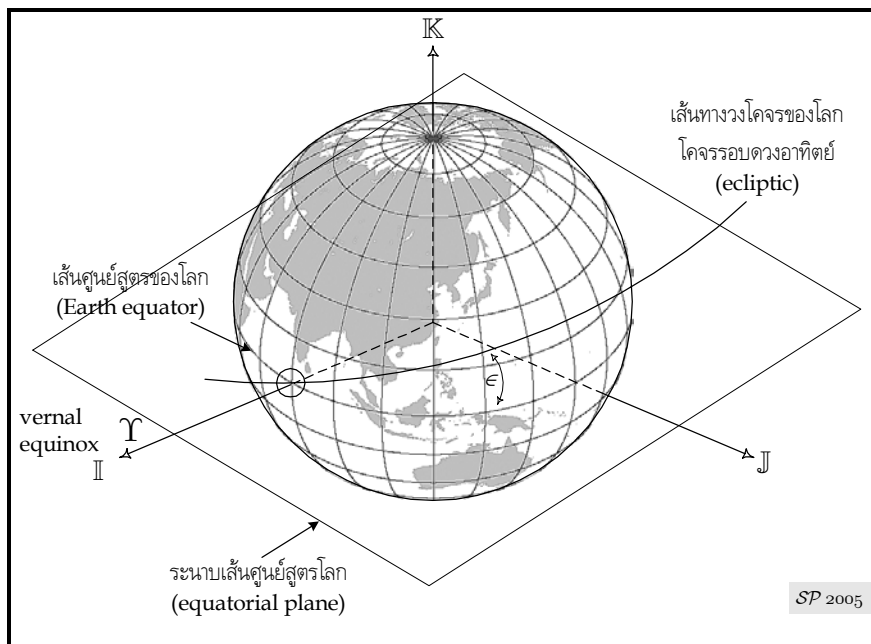
จุดกำเนิดของระบบพิกัดที่พิจารณาโลกเป็นฐานอ้างอิง อาจจะเป็นจุดศูนย์กลางโลก หรือ ณ ตำแหน่งที่ทำการแผ่สังเกตการณ์ ซึ่งอาจจะอยู่บนพื้นโลก หรือ ระดับความสูงจากพื้นโลก

## ระบบพิกัด Geocentric Equatorial Coordinate System, IJK

ข้อมูลสำคัญของระบบพิกัด IJK

|                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| จุดกำเนิด         | จุดศูนย์กลางโลก       |
| ระนาบหลักมูล      | ระนาบเส้นศูนย์สูตรโลก |
| ทิศของแกนमुखสำคัญ | เวนอนอล อีควิน็อกซ์   |

จากข้อมูลดังแสดงในตารางข้างต้น แกน I จะชี้จากจุดศูนย์กลางโลกผ่านตำแหน่งเวนอนอล อีควิน็อกซ์ ในขณะที่แกน J ทำมุม 90 องศา กับแกน I ไปทางทิศตะวันออกโดยอยู่บนระนาบเส้นศูนย์สูตรโลก และแกน K ทำมุมเชิงตั้งฉากกับแกนทั้งสองโดยชี้ผ่านขั้วโลกเหนือ ดังแสดงในรูปที่ ๓.๓



รูปที่ ๓.๓ ระบบพิกัด IJK

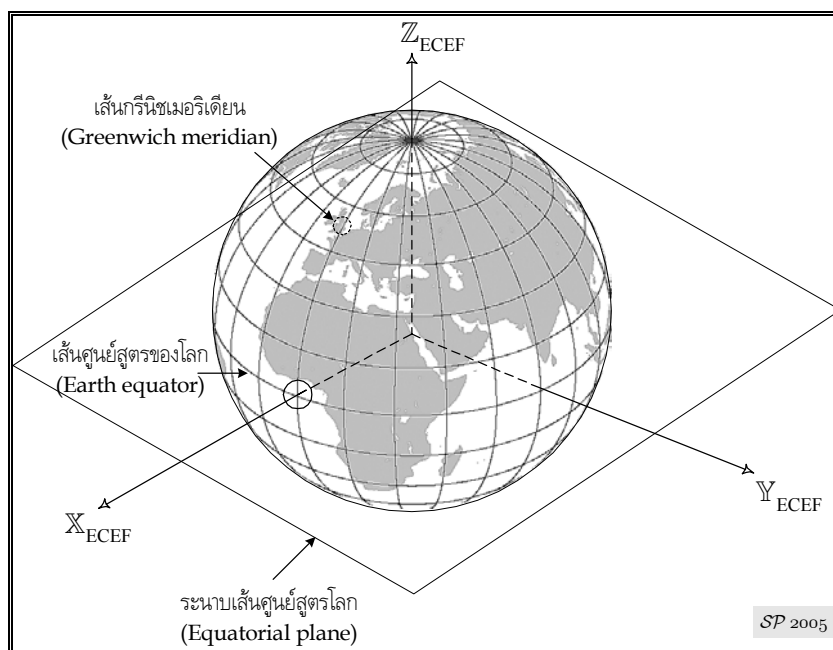
ระบบพิกัด IJK เป็นระบบที่ถูกกำหนดให้อยู่กับที่โดยไม่มีการหมุน ระบบพิกัดนี้เป็นระบบพิกัดที่สำคัญมากในการวิเคราะห์และคำนวณวัตถุท้องฟ้าในสาขาดาราศาสตร์ (astrodynamics) เนื่องจากระบบพิกัด IJK เป็นระบบพิกัดที่ถูกสมมุติให้อยู่กับที่ในอวกาศ ทำให้มีการใช้งานสลับกันกับระบบพิกัด ECI (Earth-Centred Inertial) อยู่บ่อยครั้ง ถึงแม้ทั้งสองระบบพิกัดจะมีความคล้ายกันมาก แต่โดยทั่วไปแล้ว ระบบพิกัด IJK จะใช้ในกรณีทั่วไป ในขณะที่ระบบพิกัด ECI จะรวมผลที่เกิดจากการส่าย และการกวัด

**ระบบพิกัด Earth-Centered, Earth-Fixed Coordinate System, ECEF**

ข้อมูลสำคัญของระบบพิกัด ECEF

|                   |   |
|-------------------|---|
| จุดกำเนิด         | จุดศูนย์กลางโลก   |
| ระนาบหลักมูล      | ระนาบเส้นศูนย์สูตรโลก   |
| ทิศของแกนमुखสำคัญ | เส้นเมริเดียนที่กำหนด แต่โดยส่วนใหญ่จะเลือกเส้นกรีนวิชเมริเดียน |

ระบบพิกัด ECEF เป็นระบบพิกัดที่ถูกสมมุติให้มีการหมุนไปพร้อมกับการหมุนของโลก โดยแกน  $X_{ECEF}$  จะชี้ไปจุดตัดกันของเส้นเมริเดียนหนึ่งๆที่กำหนดไว้กับระนาบเส้นศูนย์สูตร ทำให้ระบบพิกัดเสมือนกับการหมุนไปพร้อมกับการหมุนของโลก ระบบพิกัด ECEF นี้เหมาะสำหรับการใช้งานด้านการประมวลผลการสังเกตการณ์ดาวเทียมจากสถานีภาคพื้นดิน



รูปที่ ๓.๔ ภาพของระบบพิกัด ECEF

**๓.๒.๑.๒ ระบบพิกัดที่พิจารณาตัวดาวเทียมเป็นฐานอ้างอิง**

ระบบพิกัดที่พิจารณาตัวดาวเทียมเป็นฐานอ้างอิง จะถูกกำหนดขึ้นเพื่อใช้งานกับพันธะกิจของดาวเทียมดวงใดดวงหนึ่งอย่างเฉพาะเจาะจง ทำให้ระบบพิกัดดังกล่าวค่อนข้างหลากหลาย อีกทั้งการ

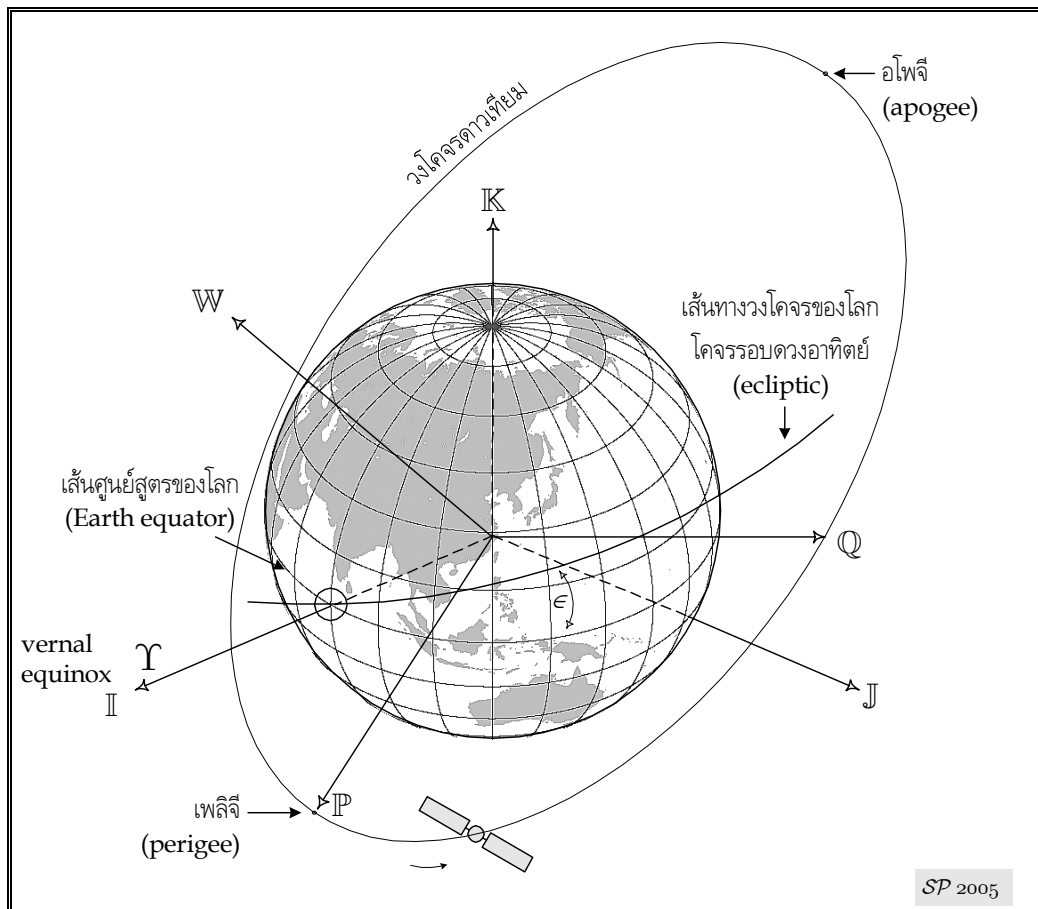
ตั้งชื่อของแต่ละกรอบพิกัดไม่ได้เป็นมาตรฐานตามที่ใช้งานกันในวงกว้าง ข้อพิจารณาร่วมกันของระบบพิกัดดังกล่าวจะใช้ระนาบวงโคจรของดาวเทียมเป็นระนาบหลักมูลในการสร้างและกำหนดกรอบพิกัด

### ระบบพิกัด perifocal coordinate system (PQW)

ข้อมูลสำคัญของระบบพิกัด PQW

|                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| จุดกำเนิด         | จุดศูนย์กลางโลก     |
| ระนาบหลักมูล      | ระนาบวงโคจรดาวเทียม |
| ทิศของแกนमुखสำคัญ | จุดเพิลิจี          |

ระบบพิกัด PQW มีแกน P ชี้ไปยังทิศของเพิลิจี และแกน Q ทำมุม 90 องศา กับแกน P ไปในทิศทางการเคลื่อนที่ของดาวเทียม โดยแกน P อยู่บนระนาบวงโคจรดาวเทียม สำหรับทิศของแกน W จะตั้งฉากกับระนาบวงโคจรดาวเทียม



รูปที่ ๓.๕ ภาพของระบบพิกัด PQW

จากรูปที่แสดงระบบพิกัด PQW จะสังเกตได้ว่าระบบพิกัดนี้จะพยายามรักษาทิศทางของวงโคจรไปในทิศทางของเพิลิจิตลอดเวลา ทำให้ระบบพิกัดนี้เสมือนกับไม่หมุนไปกับการเคลื่อนที่ของดาวเทียม ระบบพิกัดนี้เหมาะสมที่จะใช้ในการอธิบายและกำหนดรูปร่างของวงโคจรได้ โดยอีกนัยหนึ่งก็คือการหาค่าแอกเซ็นทริซิตี

สำหรับกรณีที่วงโคจรเป็นวงกลมหรือเกือบที่จะเป็นวงกลม ตำแหน่งเพิลิจีอาจจะไม่สามารถกำหนดได้ ซึ่งจะทำให้การกำหนดทิศของแกน  $P$  ไม่สามารถทำได้ อย่างไรก็ตามในกรณีนี้ เราอาจจะกำหนดทิศของแกน  $P$  บนระนาบเส้นศูนย์สูตรโลกได้โดยให้ชี้ไปที่ตำแหน่งของจุดไต่ขึ้น (ascending node) ของดาวเทียมหรือวัตถุท้องฟ้า ซึ่งเราสามารถเรียกระบบพิกัดนี้ว่า ระบบพิกัดโนดัล (nodal coordinate system)

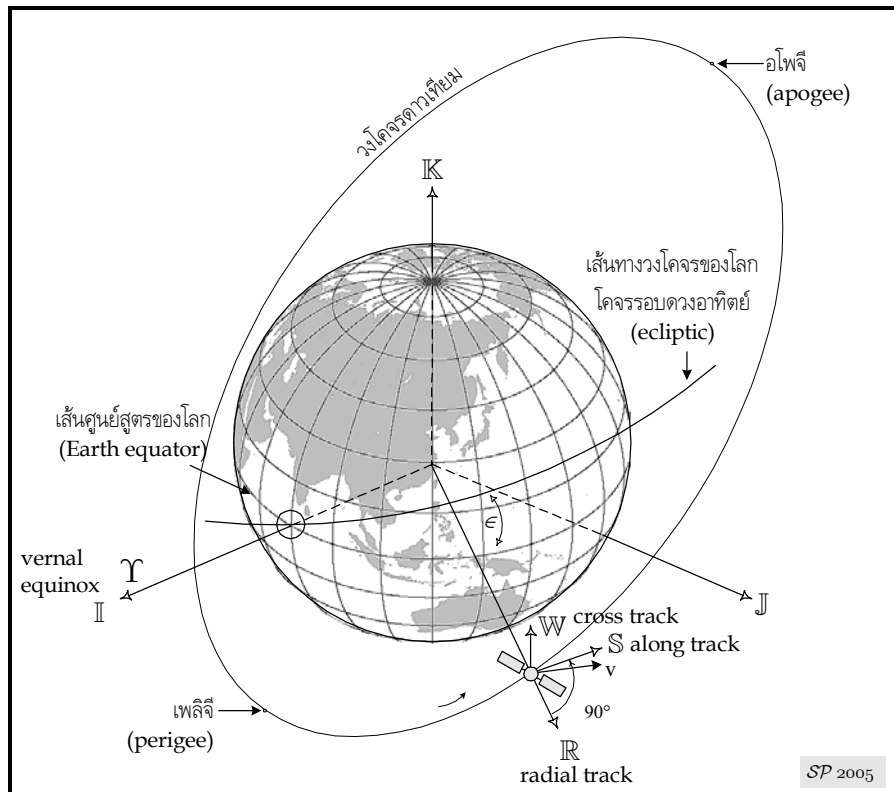
อีกแนวทางหนึ่งที่สามารถทำได้ในการกำหนดทิศของแกน  $P$  บนระนาบเส้นศูนย์สูตรโลก สำหรับกรณีที่วงโคจรเป็นวงกลมหรือเกือบที่จะเป็นวงกลม ก็คือ กำหนดทิศของแกน  $P$  ให้ชี้ไปที่ตำแหน่งของเวนอนล อีคิว น็อกซ์

### ระบบพิกัด RSW coordinate system (RSW)

ข้อมูลสำคัญของระบบพิกัด RSW

|                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| จุดกำเนิด         | จุดศูนย์กลางโลก     |
| ระนาบหลักมูล      | ระนาบวงโคจรดาวเทียม |
| ทิศของแกนमुखสำคัญ | ตำแหน่งดาวเทียม     |

ระบบพิกัด RSW นี้เหมาะสำหรับการคำนวณการเคลื่อนที่ของดาวเทียมหรือวัตถุท้องฟ้าในลักษณะแบบสัมพัทธ์ (relative motion) โดยแกน  $R$  ถูกกำหนดให้ชี้ไปในแนวของเวกเตอร์รัศมีจากจุดศูนย์กลางโลกไปยังตำแหน่งของดาวเทียมซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปในวงโคจรของตัวเอง ทำให้ระบบพิกัดนี้จะมีการเคลื่อนไปพร้อมกับดาวเทียม โดยมีแกน  $W$  มีทิศตั้งฉากกับระนาบวงโคจร สำหรับแกน  $S$  จะตั้งฉากกับแกน  $R$  และมีทิศไปในทิศทางการเคลื่อนที่ของดาวเทียม โดยสังเกตได้ว่าทิศของแกน  $S$  อาจจะไม่อยู่ในแนวของเวกเตอร์ความเร็ว ( $\mathbf{v}$ ) ของดาวเทียมหรืออาจจะไม่อยู่ก็ได้ ขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของวงโคจร โดยถ้าวงโคจรมีลักษณะเป็นวงกลม (หรือวงรี ที่ตำแหน่ง เพิลิจี และ อโพลี) ทิศของแกน  $S$  จะอยู่ในแนวของเวกเตอร์ความเร็ว



รูปที่ ๓.๖ ภาพของระบบพิกัด RSW

จากรูปที่ ๓.๖ ตำแหน่งของดาวเทียมในแนวรัศมี (radial position) จะพิจารณาได้จากทิศทางของเวกเตอร์ตำแหน่ง ซึ่งอยู่บนทิศทางของแกน R ในขณะที่ตำแหน่งของดาวเทียมในแนวการเคลื่อนที่ (along-track) พิจารณาได้จากทิศที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ตำแหน่ง ซึ่งอยู่บนทิศทางของแกน S สำหรับตำแหน่งของดาวเทียมในแนวขวาง (cross-track) พิจารณาได้จากทิศที่ตั้งฉากกับระนาบวงโคจร โดยถูกกำหนดได้จากตำแหน่งปัจจุบันของดาวเทียมและเวกเตอร์ความเร็ว

### ๓.๒.๒ ระบบเวลา (time system)

ระบบเวลาที่นิยมใช้งานวิจัยทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์จะมีอยู่ 4 ระบบ ได้แก่ เวลาไซดรีเรียล (sidereal time) เวลาสุริยะหรือเวลาสากล (solar time or universal time) เวลาพลวัต (dynamical time) และ เวลาอะตอมมิก (atomic time) [Vallado, 1997, หน้า 55 - 74] โดยที่ สองระบบเวลาแรกเป็นฐานเวลาที่พิจารณาจากการหมุนของโลก และใช้สมการคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือช่วยในการกำหนดการนับ สำหรับอีกสองระบบเวลา (เวลาพลวัต และ เวลาอะตอมมิก) จะแตกต่างกับระบบเวลาอื่นๆโดยสิ้นเชิง โดยทั้งเวลาพลวัต และ เวลาอะตอมมิก เป็นระบบเวลาที่มีความเที่ยงตรงสูงมาก

### ๓.๒.๒.๑ เวลาไซดีเรียล (sidereal time)

เวลาไซดีเรียลถูกกำหนดขึ้นจากการเฝ้าสังเกตการหมุนของโลก ณ ขั้วโลกเหนือ ในทิศทางจากเวนอนอล อีควิน็อกซ์ ไปยังเมอร์ริเดียนท้องถิ่น โดยค่าที่วัดได้มีค่าเป็นบวกสำหรับทิศตรงข้ามการหมุนของโลก เวลาไซดีเรียลที่อ้างอิงกับกรีนิชเมอร์ริเดียนถูกเรียกว่า “เวลาไซดีเรียลกรีนิช” (Greenwich sidereal time : GST) โดยใช้สัญลักษณ์ “ $\theta_{GST}$ ” สำหรับเวลาไซดีเรียล ณ พิกัดลองจิจูดเฉพาะ ถูกเรียกว่า “เวลาไซดีเรียลท้องถิ่น” (local sidereal time : LST) โดยใช้สัญลักษณ์  $\theta_{LST}$

ฐานเวลาไซดีเรียลมีการเปลี่ยนแปลงเนื่องมาจากทิศของเวนอนอล อีควิน็อกซ์มีการเคลื่อนไป (ตำแหน่งเวนอนอล อีควิน็อกซ์ เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบวงโคจรของโลกและระนาบเส้นศูนย์สูตร) ซึ่งโดยข้อเท็จจริงแล้วระนาบทั้งสองมีการเคลื่อนที่แต่ช้ามากๆ เพื่อหลีกเลี่ยงประเด็นดังกล่าว เวลาไซดีเรียลเฉลี่ย (mean sidereal time) ได้ถูกกำหนดขึ้น โดยอ้างอิงกับทิศอีควิน็อกซ์เฉลี่ย และรวมผลของการเคลื่อนไปของทิศที่เกิดจากการส่าย (precession) แบบซิคคิวลาร์เท่านั้น สำหรับเวลาไซดีเรียลปรากฏ (apparent sidereal time) จะอ้างอิงกับเวนอนอล อีควิน็อกซ์จริง (true vernal equinox) โดยรวมผลของทั้งการกวัด (nutation) และการส่ายทั้งแบบซิคคิวลาร์และแบบคาบเวลา

### ๓.๒.๒.๒ เวลาสุริยะ (solar time)

ฐานเวลาของเวลาสุริยะถูกกำหนดจากช่วงเวลาในระหว่างการเคลื่อนของดวงอาทิตย์ผ่านเส้นเมอร์ริเดียนท้องถิ่น ซึ่งจากหลักการดังกล่าวได้ถูกนำมากำหนดค่าเวลาของวันๆหนึ่งที่เรารู้จักกันอยู่ (1 วัน เท่ากับ 24 ชั่วโมง) อย่างไรก็ตาม เมื่อสังเกตการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์ในรอบปีจะพบว่าในลักษณะไม่สม่ำเสมอ โดยเกิดจากสาเหตุหลายประการรวมกัน เริ่มจากโลกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่ไม่คงที่ อีกทั้งวงโคจรของโลกก็ไม่ใช่แบบวงกลม นอกจากนี้ระนาบวงโคจรของโลกยังทำมุมกับระนาบเส้นศูนย์สูตร 23.5 องศา ซึ่งจากปัจจัยเหล่านี้ส่งผลให้การเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์บนระนาบวงโคจรของโลกจึงมีลักษณะเป็นแบบไซนูซอยด์บนเส้นศูนย์สูตร

#### เวลาสุริยะเฉลี่ย หรือ เวลาสากล (mean solar time or universal time)

เวลาสุริยะเฉลี่ย (mean solar time) เป็นเวลาที่มีความสม่ำเสมอของฐานเวลาเมื่อเปรียบเทียบกับเวลาสุริยะปรากฏ (apparent solar time) ที่ใช้งานกันจนถึงปลายทศวรรษที่ 19 โดยในปี 1895 Simon Newcomb ได้นำเสนอเส้นสมมุติการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์ (fictitious mean Sun) ตามแนวเส้นศูนย์สูตร ซึ่งอัตราการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่เฉลี่ยในรอบปีของดวงอาทิตย์ ดังนั้นมุมชั่วโมง (hour angle) ของเส้นสมมุติดังกล่าวถูกนำมากำหนดเวลาสุริยะเฉลี่ย โดยเริ่มต้นจาก



ทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียน สำหรับเวลาสากล (UT: universal time) เป็นเวลาสุริยะเฉลี่ยที่กรีนิชเมริเดียน ทำให้มีชื่อเรียกที่เราคุ้นเคยกันดีว่า “GMT” (Greenwich mean time)

เวลาสากลที่นิยมใช้งานกันจะมี 3 แบบ ได้แก่

UT0 ซึ่งถูกกำหนดโดยการแผ่รังสีเกิดเวลาไฮโดรเจนของเมริเดียนท้องถิ่น

UT1 เป็นเวลา UT0 ที่มีการนำผลกระทบที่เกิดการเคลื่อนที่ของขั้วโลกมาพิจารณาด้วย

UT2 เป็นเวลา UT1 ที่มีการขจัดผลกระทบที่เกิดจากฤดูกาล อย่างไรก็ตาม UT2 ยังเป็นระบบเวลาที่ยังมีความไม่สม่ำเสมอเพียงพอต่องานวิจัยที่ต้องการฐานเวลาที่มีเสถียรภาพสูง

### ๓.๒.๒.๓ เวลาอะตอมมิก (atomic time)

ฐานเวลาของเวลาอะตอมมิกขึ้นอยู่กับคาบเวลาการสั่นของสัญญาณความถี่สูงภายใต้สภาวะเรโซแนนซ์ซึ่งเกิดขึ้นในขณะที่มีการเปลี่ยนสถานะของอะตอม ในปัจจุบันฐานเวลาอะตอมมิกใช้อะตอมของซีเซียม (Cs 133) หรือ ไฮโดรเจน (H 1) หรือ รูบิเดียม (Rb 87) อย่างไรก็ตามจากการทดสอบพบว่า ฐานเวลาอะตอมมิกที่ใช้อะตอมของซีเซียมให้เสถียรภาพในระยะยาวดีที่สุด โดยคาบเวลา 1 วินาทีถูกกำหนดขึ้นจากรอบการสั่นภายในของอะตอมซีเซียม 9,192,631,770 รอบ โดยตัวเลขดังกล่าวเป็นค่ามาตรฐานที่ได้รับการรับรองจากการประชุมครั้งที่ 13 ของการประชุม General Conference on Weight and Measures ในปี 1967 และ ค่าเวลา 1 วินาทีของเวลาอะตอมมิกถูกกำหนดให้เป็นหน่วยวินาทีของระบบเอสไอ (System International : SI)

จากจำนวนรอบของการสั่นที่ใช้ในการกำหนดค่าเวลา ทำให้เวลาอะตอมมิกเป็นฐานเวลาที่มีความเที่ยงตรงสูงอีกทั้งเป็นอิสระจากการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจากการหมุนของโลก

### เวลาอะตอมมิกนานาชาติ (international atomic time : TAI)

อีพอคอ้างอิง (reference epoch) ของเวลาอะตอมมิก TAI คือเวลา 00:00:00 นาฬิกา ของวันที่ 1 มกราคม 1958 ซึ่งเท่ากับเวลา 00:00:00 นาฬิกา ของ UT2

### เวลา UTC (coordinated universal time : UTC)

กล่าวได้ว่า UTC เป็นระบบเวลาที่ถูกนำมาใช้งานมากที่สุด UTC ถูกกำหนดขึ้นในเดือนมกราคม ปี 1972 โดยใช้ค่าวินาทีของเวลาอะตอมมิก TAI เป็นหน่วยเวลาพื้นฐาน โดย UTC ถูกออกแบบให้ตาม UT1 ภายใน  $\pm 0.9$  วินาที แต่อย่างไรก็ตาม เวลา UT1 มีการเปลี่ยนแปลงใน

ลักษณะที่ไม่แน่นอน ทำให้จำเป็นที่จะต้องบวกค่า “วินาทีอธิกวาร” (leap second) เป็นระยะๆ เพื่อที่จะทำให้ระบบเวลาทั้งสองระบบ (UTC และ UT1) มีค่าแตกต่างกันใน  $\pm 0.9$  วินาที

### เวลา GPS

ระบบเวลา GPS มีคาบเวลาที่แตกต่างจากเวลา TAI อยู่ 19 วินาที และมีคาบเวลาตรงกันกับเวลา UTC ที่เวลา 00:00:00 นาฬิกา ของวันที่ 6 มกราคม 1980

### ๓.๒.๒.๔ เวลาพลวัต (dynamical time)

เนื่องเสถียรภาพของระบบเวลาสุริยะ หรือ เวลาไฮโดรเจน จะขึ้นอยู่กับผลกระทบที่เกิดจากดวงอาทิตย์ ดวงจันทร์ และ ดาวเคราะห์ต่างๆ ทำให้เวลาอีเฟเมอริส (Ephemeris time : ET) ถูกกำหนดขึ้น เพื่อให้เป็นระบบเวลาใหม่ที่มีเสถียรภาพดีกว่าระบบเวลาที่ขึ้นอยู่กับการหมุนของโลก อย่างไรก็ตาม ภายหลังต่อมาได้มีการค้นพบว่า ผลกระทบที่เกิดจากสัมพัทธภาพมีนัยสำคัญต่อระบบเวลาอีเฟเมอริส จึงเป็นที่มาของการนำเสนอเวลา TDT (Terrestrial Dynamical Time) และ เวลา TDB (Barycentric Dynamical Time) ในปี 1976 โดยมีวัตถุประสงค์ที่จะทดแทนเวลาอีเฟเมอริส

คาบเวลาวินาทีของเวลา TDT นำมาจากเวลา TAI โดยที่เวลา TDT มีค่าเวลาล่วงหน้าไปจาก TAI เป็นจำนวน 32.184 วินาที

### ๓.๓ การแปลงระบบพิกัด

เนื่องจากในงานวิจัยด้านวงโคจรดาวเทียมเพื่อระบุตำแหน่งของดาวเทียมนั้น ระบบพิกัดที่ใช้อ้างอิงกับโลกมีการหมุนไปตามการหมุนของโลก แต่ระบบพิกัดที่ใช้ในการคำนวณนั้นจะเป็นระบบพิกัดที่ไม่หมุน ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องมีการแปลงระบบพิกัดเพื่อให้การระบุตำแหน่งของดาวเทียมอ้างอิงกับระบบพิกัดที่ต้องการ อย่างไรก็ตามในเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ตรงกัน จำเป็นที่จะต้องกล่าวถึงการกวัด (nutation) ของแกนหลักมูลที่เกิดขึ้น โดยสามารถอธิบายได้ด้วยเมทริกซ์การหมุน

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.3.1-1)$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.1-2)$$

### ๓.๓.๑ การแปลงระบบพิกัด ระหว่าง J2000 และ ECEF

การแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัด J2000 ไปเป็นระบบพิกัด ECEF จะต้องใช้ในการแปลงถึง 4 ครั้ง โดยเริ่มต้นจากการแปลงระบบพิกัด J2000 ไปเป็นระบบพิกัด MEO (mean equator of date) โดยใช้เมทริกซ์การส่าย (precession matrix) จากนั้นระบบพิกัด MEO จะถูกแปลงไปเป็นระบบพิกัด TEO (true equator of date) โดยใช้เมทริกซ์การกวัด (nutation matrix)

ระบบพิกัด TEO เป็นระบบพิกัดที่ไม่หมุน จะถูกแปลงไปเป็นระบบพิกัด ECEF เสมือน (pseudo ECEF) โดยใช้เมทริกซ์การหมุนของแกน  $z$  สำหรับคำว่า “เสมือน” มีที่มาจากเนื่องจากการเคลื่อนที่ของขั้วโลกเหนือ ที่เรียกกันว่า “การเคลื่อนที่ของขั้วโลก” (polar motion) โดยในการอธิบายการเคลื่อนที่ดังกล่าวจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์ที่วัดโดยองค์กร IPMS (International Polar Motion Service) และถูกตีพิมพ์โดยองค์กร BIH (Bureau International de l’Heure) ซึ่งการเคลื่อนที่ของขั้วโลกจะมีลักษณะขดเป็นวงกลมรอบขั้วโลกเหนือด้วยคาบเวลา 430 วัน จากการชดเชยผลของการเคลื่อนที่ของขั้วโลก ระบบพิกัด ECEF เสมือน จะถูกแปลงไปเป็นระบบพิกัด ECEF อย่างเป็นทางการตามค่าสูงสุดของการเปลี่ยนแปลงของขั้วโลกมีขนาดประมาณ 9 เมตรในทุกทิศทาง

#### ๓.๓.๑.๑ การส่าย (Precession)

พารามิเตอร์ของการส่าย สามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned}\theta &= 2004.3109''T - 0.42665''T^2 - 0.041833''T^3 \\ z &= 2306.2181''T + 1.094685''T^2 + 0.018203''T^3 \\ \zeta &= 2306.2181''T + 0.30188''T^2 + 0.017998''T^3\end{aligned}\quad (3.3.2)$$

โดยที่  $T$  เป็นเศษศตวรรษจูเลียน (Julian century) จากอิพอคมาตรฐาน J2000 ถึงวันจูเลียนที่สนใจในระบบเวลา TDT โดยค่า  $T$  แสดงได้ตามสมการ

$$T = \frac{JD - JD_{J2000}}{36525}\quad (3.3.3)$$

โดยที่  $JD_{J2000} = 2451545$

เมทริกซ์การส่าย (precession matrix)  $\mathbf{P}$  แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_z(-z)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(-\zeta)\quad (3.3.4)$$

เมทริกซ์  $\mathbf{P}$  จะทำการแปลงเส้นศูนย์สูตรเฉลี่ยและอิควิน็อกซ์ของอีพอคาตรฐาน J2000 ไปเป็นเส้นศูนย์สูตรเฉลี่ยและอิควิน็อกซ์ของวันที่ต้องการ

$$\mathbf{r}_{\text{MoD}} = \mathbf{P}\mathbf{r}_{\text{J2000}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{J2000}} = \mathbf{P}^T \mathbf{r}_{\text{MEoD}} \quad (3.3.5)$$

โดยที่สัญลักษณ์ตัวยก  $T$  เป็นตัวดำเนินการทรานสโพสของเมทริกซ์

โดยทั่วไปแล้ว เราสมมติให้ผลลัพธ์อนุพันธ์ของเมทริกซ์การถ่ายโอนเป็นเมทริกซ์ศูนย์  $\dot{\mathbf{P}} \approx \mathbf{O}_{(3 \times 3)}$  ดังนั้นการแปลงเวกเตอร์ความเร็ว แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{v}_{\text{MoD}} = \mathbf{P}\mathbf{v}_{\text{J2000}} \Leftrightarrow \mathbf{v}_{\text{J2000}} = \mathbf{P}^T \mathbf{v}_{\text{MEoD}} \quad (3.3.6)$$

### ๓.๓.๑.๒ การกวัด (Nutation)

ในการแปลงระบบพิกัด จำเป็นที่จะต้องนำผลกระทบรายคาบที่เกิดจากดวงจันทร์มาพิจารณาด้วย โดยทั่วไปแล้วสมการการกวัดจะมีขนาดที่ยาวมาก

ค่า mean anomaly ของดวงจันทร์ ( $M_{\mathcal{C}}$ ), ค่า mean anomaly ของดวงอาทิตย์ ( $M_{\odot}$ ) และค่า mean argument of latitude ของดวงจันทร์ ( $L_{\mathcal{C}}$ ) จะถูกวัดบนระนาบวงโคจรโลก ในขณะที่ค่า mean elongation จากดวงอาทิตย์ ( $D_{\odot}$ ) และค่า longitude of the ascending node ของวงโคจรดวงจันทร์ ( $\Omega_{\mathcal{C}}$ ) คำนวณได้จาก [Vallado, 1997 หน้า 79] โดยที่ค่าทั้งหมดมีหน่วยเป็นองศา

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}} &= 134.962\,918\,4 + (1325 \times 60 + 198.867\,398\,1)T + 0.008\,6972\,T^2 + 1.778 \times 10^{-5}T^3 \\ M_{\odot} &= 357.5277233 + (99 \times 360 + 359.05034)T - 0.00016028\,T^2 - 3.33 \times 10^{-6}T^3 \\ L_{\mathcal{C}} &= 93.2719103 + (1342 \times 360 + 82.0175381)T + 0.0036825\,T^2 + 3.06 \times 10^{-6}T^3 \\ D_{\odot} &= 297.8503631 + (1236 \times 360 + 307.111480)T - 0.000191417\,T^2 - 5.28 \times 10^{-6}T^3 \\ \Omega_{\mathcal{C}} &= 125.0445222 - (5 \times 360 + 134.1362608)T + 0.0020708\,T^2 + 2.22 \times 10^{-6}T^3 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

เมื่อได้ค่าดังกล่าวแล้ว การกวัดในลองจิจูด  $\Delta\Psi$  และ การกวัดในมุมเอียง  $\Delta\epsilon$  สามารถคำนวณได้จากอนุกรมตรีโกณมิติ ตามสมการ [Vallado, 1997 หน้า 80]

$$\Delta\Psi = \sum_{i=1}^{106} (A_i + B_i T) \sin(a_i M_{\mathcal{C}} + b_i M_{\odot} + c_i L_{\mathcal{C}} + d_i D_{\odot} + e_i \Omega_{\mathcal{C}}) \quad (3.3.8-1)$$

$$\Delta\epsilon = \sum_{i=1}^{106} (C_i + D_i T) \cos(a_i M_{\mathcal{C}} + b_i M_{\odot} + c_i L_{\mathcal{C}} + d_i D_{\odot} + e_i \Omega_{\mathcal{C}}) \quad (3.3.8-2)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์  $A, B, C, D$  แสดงในตาราง D-6 [Vallado, 1997, หน้า 880 – 881]

ค่าเฉลี่ยของมุมเอียงโลกคำนวณได้จาก

$$\bar{\epsilon} = 23^{\circ} 26' 21.448'' - 46.815''T - 0.00059''T^2 + 0.001813''T^3 \quad (3.3.9)$$

โดยที่ค่าจริงของมุมเอียงโลก คำนวณได้จาก  $\epsilon = \bar{\epsilon} + \Delta \epsilon$

เมทริกซ์การกวัด  $\mathbf{N}$  คำนวณได้จาก

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_x(-\epsilon)\mathbf{R}_z(-\Delta\Psi)\mathbf{R}_x(\bar{\epsilon}) \quad (3.3.10)$$

จากสมการข้างต้นเมทริกซ์  $\mathbf{N}$  จะแปลงค่าเฉลี่ยของเส้นศูนย์สูตรและวันอิควิน็อกซ์ไปเป็นค่าจริง

$$\mathbf{r}_{\text{TEoD}} = \mathbf{N}\mathbf{r}_{\text{MEoD}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{MEoD}} = \mathbf{N}^T\mathbf{r}_{\text{TEoD}} \quad (3.3.11)$$

และเมื่อไม่พิจารณาเทอม  $\dot{\mathbf{N}}$  การแปลงความเร็วทำได้ตามสมการ

$$\mathbf{v}_{\text{TEoD}} = \mathbf{N}\mathbf{v}_{\text{MEoD}} \Leftrightarrow \mathbf{v}_{\text{MEoD}} = \mathbf{N}^T\mathbf{v}_{\text{TEoD}} \quad (3.3.12)$$

### ๓.๓.๑.๓ การหมุน (Rotation)

การแปลงระบบพิกัดครั้งที่สาม ต้องใช้เวลาไซดีเรียลปรากฏกรีนิช (Greenwich apparent sidereal time :  $\theta_{\text{A\_MST}}$ ) เนื่องจากพิกัด ECEF อ้างอิงกับเส้นศูนย์สูตรจริง โดยเวลาไซดีเรียลปรากฏกรีนิชจะถูกกวัดจากเส้นศูนย์สูตรจริงที่สัมพันธ์กับอิควิน็อกซ์จริง และ เวลาไซดีเรียลเฉลี่ยกรีนิช (Greenwich mean sidereal time:  $\theta_{\text{G\_MST}}$ ) จะถูกกวัดในแนวเส้นศูนย์สูตรเฉลี่ยที่สัมพันธ์กับอิควิน็อกซ์เฉลี่ย โดยค่าแตกต่างระหว่างเวลาทั้งสองคำนวณได้จากสมการของอิควิน็อกซ์ [Vallado, 1997]

$$\theta_{\text{G\_AST}} = \theta_{\text{G\_MST}} + \Delta\Psi \cos \epsilon \quad (3.3.13)$$

ในการแปลงระบบพิกัดต้องใช้ค่าเวลาที่สนใจ โดยจะต้องเป็นเวลา  $JD$  ที่เทียบกับเวลา UT1

$$JD = JD_{\text{midnight}} + \Delta JD \quad (3.3.14)$$

โดยที่  $JD_{\text{midnight}}$  เป็นเวลาจูเลียน ณ. เวลาเที่ยงคืน ที่ใกล้กับเวลา  $JD$  มากที่สุด

$\Delta JD$  เป็นเศษของเวลาสุริยะเฉลี่ยจากเที่ยงคืนจนถึงเวลา  $JD$

ค่าที่ได้จากการคำนวณข้างต้น จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณค่าเศษของศตวรรษจูเลียน ( $T_{\text{FJC}}$ ) จากอีพอคมาตรฐาน J2000 ถึงเวลาเที่ยงคืนของวันที่ใกล้กับเวลา  $JD$  มากที่สุด

$$T_{\text{FJC}} = \frac{JD_{\text{midnight}} - JD_{\text{J2000}}}{36525} \quad (3.3.15)$$

ค่าอัตราส่วนเวลาไซดีเรียลต่อเวลาสุริยะ (รอบต่อวันสุริยะเฉลี่ย) คำนวณได้จาก

$$\dot{\theta} = 1.002\,737\,909\,350\,795 + 5.9006 \times 10^{-11} T_{\text{FJC}} - 5.9 \times 10^{-15} T_{\text{FJC}}^2 \quad (3.3.16)$$

ค่าอัตราส่วนดังกล่าวเป็นอนุพันธ์ของเวลาไซดีเรียลเฉลี่ยกรีนวิชเทียบกับเวลา UT1 ดังนั้นเวลาไซดีเรียลเฉลี่ยกรีนวิช ณ. เวลาเที่ยงคืน ในหน่วยวินาทีคำนวณได้จาก

$$\theta_{\text{G\_MST\_MID}} = 24110.54841'' + 8640184.812\,866'' T_{\text{FJC}} + 0.093\,104'' T_{\text{FJC}}^2 - 6.2 \times 10^{-6} T_{\text{FJC}}^3 \quad (3.3.17)$$

ค่าเวลาไซดีเรียลเฉลี่ยกรีนวิช สามารถคำนวณได้จากเวลาไซดีเรียลเฉลี่ยกรีนวิช ณ. เวลาเที่ยงคืน โดยการบวกเวลาระโดดที่ได้จากค่าเวลา  $\Delta JD$

$$\theta_{\text{G\_MST}} = \theta_{\text{G\_MST\_MID}} + \dot{\theta} \Delta JD \quad (3.3.18)$$

ดังนั้น เมทริกซ์การหมุน คำนวณได้จาก

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\theta_{\text{G\_AST}}) \quad (3.3.19)$$

จากสมการข้างต้น เมทริกซ์การหมุน  $\mathbf{R}$  จะแปลงค่าจริงของเส้นศูนย์สูตร และ วันอิควิน็อกซ์ไปเป็นค่าจริงของเส้นศูนย์สูตร และ วันกรีนวิชเมอร์ริเดียน ตามสมการ

$$\mathbf{r}_{\text{ECEF}} = \mathbf{R} \mathbf{r}_{\text{TEoD}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{TEoD}} = \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{\text{ECEF}} \quad (3.3.20)$$

และจากการแปลงครั้งที่ 3 เป็นการแปลงจากกรอบพิกัดที่ไม่เคลื่อนที่ไปยังกรอบพิกัดที่เคลื่อนที่ การแปลงความเร็วทำได้ตามสมการ

$$\mathbf{v}_{\text{ECEF}} = \mathbf{R} \mathbf{v}_{\text{TEoD}} + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{r}_{\text{TEoD}} \Leftrightarrow \mathbf{v}_{\text{TEoD}} = \mathbf{R}^T \mathbf{v}_{\text{ECEF}} + \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{r}_{\text{ECEF}} \quad (3.3.22)$$

การแปลงความเร็วในรูปแบบที่มีเวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของโลก  $\boldsymbol{\omega}_{\oplus}$  แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{v}_{\text{ECEF}} = \mathbf{v}_{\text{TEoD}} - (\boldsymbol{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{r}_{\text{ECEF}}) \quad (3.3.23)$$

โดยที่  $\omega_{\oplus} = [0 \ 0 \ \dot{\theta}]^T$  และไม่พิจารณาผลของเทอม  $\dot{\theta}$

### ๓.๓.๑.๔ สรุป การแปลงระหว่างระบบพิกัด J2000 กับ ระบบพิกัด ECEF

การแปลงระหว่างระบบพิกัด J2000 กับ ระบบพิกัด ECEF

$$\mathbf{r}_{\text{ECEF}} = (\mathbf{RNP})\mathbf{r}_{\text{J2000}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{J2000}} = (\mathbf{RNP})^T \mathbf{r}_{\text{ECEF}} \quad (3.3.24)$$

$$\mathbf{v}_{\text{ECEF}} = (\mathbf{RNP})\mathbf{v}_{\text{J2000}} + (\dot{\mathbf{RNP}})\mathbf{r}_{\text{J2000}} \Leftrightarrow \mathbf{v}_{\text{J2000}} = (\mathbf{RNP})^T \mathbf{v}_{\text{ECEF}} + (\dot{\mathbf{RNP}})^T \mathbf{r}_{\text{ECEF}} \quad (3.3.25)$$

### ๓.๓.๒ การแปลงระบบพิกัดอื่นๆ

#### ๓.๓.๒.๑ การแปลงระหว่างระบบพิกัด PQW กับ ระบบพิกัด ECI

การแปลงระหว่างระบบพิกัด PQW กับ ระบบพิกัด ECI แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{r}_{\text{ECI}} = \mathbf{R}_z(-\Omega)\mathbf{R}_x(-I)\mathbf{R}_z(-\omega)\mathbf{r}_{\text{PQW}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{PQW}} = \mathbf{R}_z(\omega)\mathbf{R}_x(I)\mathbf{R}_z(\Omega)\mathbf{r}_{\text{ECI}} \quad (3.3.26)$$

โดยที่ สมาชิกเคปเลอร์  $\Omega$  เป็นจุดไต่ขึ้น (ascending node),  $I$  เป็นมุมเอียง (inclination) และ  $\omega$  เป็น argument of perigee

สำหรับกรณีที่ ทิศของแกนหลักมูลชี้ไปที่จุดไต่ขึ้น ระบบพิกัดดังกล่าวจะถูกเรียกว่า ระบบพิกัด Nodal ซึ่งการแปลงระหว่างระบบพิกัด Nodal กับ ระบบพิกัด ECI แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{r}_{\text{ECI}} = \mathbf{R}_z(-\Omega)\mathbf{R}_x(-I)\mathbf{r}_{\text{Nodal}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{Nodal}} = \mathbf{R}_x(I)\mathbf{R}_z(\Omega)\mathbf{r}_{\text{ECI}} \quad (3.3.27)$$

#### ๓.๓.๒.๒ การแปลงระหว่างระบบพิกัด PQW กับ ระบบพิกัดของดาวเทียม

การแปลงระหว่างระบบพิกัด PQW กับ ระบบพิกัดของดาวเทียม แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{r}_{\text{SAT}} = \mathbf{R}_z(\nu)\mathbf{r}_{\text{PQW}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{PQW}} = \mathbf{R}_z(-\nu)\mathbf{r}_{\text{SAT}} \quad (3.3.28)$$

โดยที่  $\nu$  เป็น true anomaly ของดาวเทียม

การแปลงระหว่างระบบพิกัด Nodal กับ ระบบพิกัดของดาวเทียม แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{r}_{\text{SAT}} = \mathbf{R}_z(\nu + \omega)\mathbf{r}_{\text{Nodal}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{Nodal}} = \mathbf{R}_z(-\nu - \omega)\mathbf{r}_{\text{SAT}} \quad (3.3.28)$$

### ๓.๓.๒.๓ การแปลงระหว่าง ECI กับ PQW/Nodal/ดาวเทียม โดยใช้คาร์ทีเซียน

ถ้าให้เวกเตอร์ตำแหน่ง  $\mathbf{r}$  และเวกเตอร์ความเร็ว  $\mathbf{v}$  ของดาวเทียมอ้างอิงกับระบบพิกัด ECI การแปลงระหว่างระบบพิกัด ECI และ ระบบพิกัดของ PQW/Nodal/ดาวเทียม สามารถทำได้โดยไม่ต้องใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยการแปลงระบบพิกัด PQW ต้องการเวกเตอร์ eccentricity เพื่อที่จะกำหนดทิศทางของพลีลิจี โดยที่เวกเตอร์ eccentricity คำนวณได้จาก

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu} \left[ \left( v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] \quad (3.3.29)$$

และ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกนทั้งสามของระบบพิกัดคำนวณได้จาก

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\|}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{W} \times \mathbf{U}, \quad \mathbf{W} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\|} \quad (3.3.29)$$

ดังนั้นการแปลงระหว่างระบบพิกัด PQW กับ ระบบพิกัด ECI แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{r}_{\text{ECEF}} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{V} \quad \mathbf{W}] \mathbf{r}_{\text{PQW}} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\text{PQW}} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{V} \quad \mathbf{W}]^T \mathbf{r}_{\text{ECEF}} \quad (3.3.24)$$

การแปลงสำหรับระบบพิกัด Nodal เฉพาะเวกเตอร์  $\mathbf{U}$  จะคำนวณจาก

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{\|\mathbf{k} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\|} \quad (3.3.29)$$

โดยที่  $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$

การแปลงสำหรับระบบพิกัดดาวเทียม เฉพาะเวกเตอร์  $\mathbf{U}$  จะคำนวณจาก

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad (3.3.30)$$



### ๓.๔ ข้อมูลการวัดจากสัญญาณจีพีเอส

ข้อมูลการวัดที่จากสัญญาณจีพีเอสมีสองแบบ ได้แก่ 1) ระยะเสมือนระหว่างดาวเทียมจีพีเอสและผู้รับที่มีเครื่องรับสัญญาณจีพีเอส และ 2) เฟส(หรือระยะทาง)แตกต่างของสัญญาณคลื่นพาห์ระหว่างสายอากาศสองชุด

#### ๓.๔.๑ ระยะเสมือน (pseudorange)

ในการคำนวณหาตำแหน่งของเครื่องรับสัญญาณจีพีเอส(ที่ติดตั้งบนดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำ) จำเป็นที่จะต้องใช้ข้อมูลสำคัญเพื่อการประมวลผล ได้แก่

- 1) ต้องทราบตำแหน่งของดาวเทียมจีพีเอส
- 2) ต้องทราบระยะทางระหว่างดาวเทียมจีพีเอสและเครื่องรับสัญญาณจีพีเอส

ข้อมูลตำแหน่งของดาวเทียมจีพีเอส เครื่องรับสามารถทราบได้หลังจากที่รับสัญญาณจีพีเอสแล้วทำการถอดรหัสข้อมูลออก เนื่องจากข้อมูลดังกล่าวบรรจุอยู่ในข้อมูลนำร่องที่แพร่ออกมาโดยดาวเทียมจีพีเอส

สำหรับระยะทางระหว่างดาวเทียมจีพีเอสและเครื่องรับสัญญาณจีพีเอสนั้น โดยทางทฤษฎีแล้วสามารถคำนวณได้จากการคูณค่าความเร็วแสงด้วยค่าเวลาที่คลื่นสัญญาณวิทยุเดินทางจากดาวเทียมจีพีเอสมาถึงเครื่องรับสัญญาณ (TOA: time of arrival)

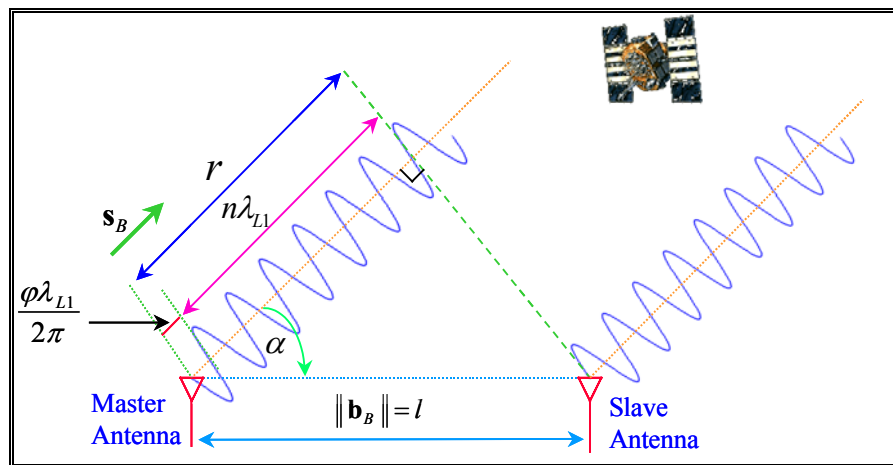
อย่างไรก็ตาม เครื่องรับไม่สามารถคำนวณระยะดังกล่าวได้โดยตรง เนื่องจากไม่ทราบว่าสัญญาณจีพีเอสถูกแพร่ออกจากดาวเทียมจีพีเอส ณ เวลาใด ดังนั้นจึงใช้ข้อมูลรหัสที่เข้ารหัสข้อมูลนำร่องมาใช้ในการหาค่าเวลาเสมือนกับว่าคลื่นสัญญาณวิทยุเดินทางจากดาวเทียมจีพีเอสมาถึงเครื่องรับสัญญาณ โดยในแต่ละช่องสัญญาณของเครื่องรับสัญญาณจะมีโมดูลการติดตามสัญญาณ โดยโมดูลดังกล่าวจะทำการสร้างข้อมูลรหัสที่ตรงกับข้อมูลรหัสที่ดาวเทียมจีพีเอส สมมุติว่าทำการสร้างข้อมูลรหัส ณ เวลา  $t_0$  จากนั้น โมดูลดังกล่าวจะทำการเลื่อนข้อมูลรหัสไปที่ละหนึ่งชิป (บิตของรหัส) จากนั้นทำการเปรียบเทียบรูปแบบของข้อมูลรหัสที่สร้างขึ้น(และเลื่อนไป)กับข้อมูลรหัสที่ได้รับจากสัญญาณดาวเทียมจีพีเอส

เนื่องจากรูปแบบของข้อมูลรหัสของจีพีเอสจะมีการวนซ้ำ (รหัส C/A วนซ้ำทุก 1 มิลลิวินาที โดยมีอัตราการชิป 1.023 MHz ส่วนรหัส P วนซ้ำทุก 1 สัปดาห์ โดยมีอัตราการชิป 10.23 MHz) ดังนั้นจะต้องมี ณ. เวลาหนึ่งๆที่ข้อมูลรหัสที่สร้างขึ้นและเลื่อนไป จะมีรูปแบบที่ตรงกับข้อมูลรหัสที่ได้รับจากสัญญาณดาวเทียมจีพีเอส สมมติว่า ณ. เวลา  $t_1$

ค่าเวลาระหว่าง  $t_0$  และ  $t_1$  ถูกกำหนดให้เสมือนกับเป็นค่า TOA ดังนั้นระยะทางที่เกิดจากการคูณกันระหว่าง ค่า TOA เสมือน และ ค่าความเร็วแสง จึงมิใช่ระยะทางจริงระหว่างดาวเทียมจีพีเอส และเครื่องรับสัญญาณจีพีเอส อีกทั้งฐานเวลาระหว่างนาฬิกาของเครื่องรับจีพีเอส และ นาฬิกาของระบบจีพีเอสมีความแตกต่างกัน ทำให้ระยะดังกล่าวถูกเรียกว่า “ระยะเสมือน”

**๓.๔.๒ เฟสแตกต่างของสัญญาณคลื่นพาห์**

เฟสแตกต่างของสัญญาณคลื่นพาห์จีพีเอสเป็นข้อมูลการวัดที่ใช้สำหรับการคำนวณหาการวางตัวของดาวเทียม โดยมีหลักการการวัดแสดงในรูปที่ ๓.๗



รูปที่ ๓.๗ ภาพของเฟสความแตกต่างของสัญญาณคลื่นพาห์จีพีเอส

จากรูปที่ ๓.๗ สายอากาศจีพีเอสสองชุดวางห่างกันเป็นระยะ  $l$  เมตร บนดาวเทียมที่โคจรในวงโคจรโลกต่ำ เมื่อสายอากาศแต่ละชุดรับสัญญาณคลื่นพาห์จีพีเอส เฟสที่แตกต่างระหว่างสองสัญญาณถูกกำหนดให้เป็นเฟสแตกต่าง  $\phi$  (carrier phase difference) มีหน่วยเป็นเรเดียน และเมื่อระยะห่าง  $l$  ระหว่างสายอากาศ มีค่ามากกว่าความยาวคลื่นของสัญญาณคลื่นพาห์จีพีเอส ส่งผลให้จำนวนเต็มลูกคลื่นของเฟสแตกต่างไม่สามารถหาได้ โดยปัญหาดังกล่าวถูกเรียกว่า “integer ambiguity problem”

จากภาพที่แสดงในรูปที่ ๓.๗ การฉายของเวกเตอร์เบสไลน์สายอากาศลงบนทิศทางของเวกเตอร์ไลน์ออฟไซท์ที่ชี้ไปยังดาวเทียมจีพีเอสถูกกำหนดให้เป็น “ระยะทางแตกต่างเดี่ยว (single path difference)” ซึ่งพิจารณาในหน่วยของระยะทาง โดยแสดงได้ตามสมการ

$$r = \frac{\phi\lambda_{L1}}{2\pi} + n\lambda_{L1} = l \cos(\alpha) \quad (3.4.1)$$

โดยที่  $n$  เป็นจำนวนเต็มลูกคลื่นของเฟสแตกต่างที่ไม่ทราบค่า (กรณีที่ไม่มีความผิดพลาดในการวัด)

$\lambda_{L1}$  เป็นความยาวคลื่นของสัญญาณคลื่นพาห้จีพีเอส ความถี่  $L1$

$\alpha$  เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ไลน์ออฟไซท์และเวกเตอร์เบสไลน์สายอากาศ

พิจารณากรณีที่ไม่มีความผิดพลาดในการวัด ขนาดของค่าที่วัดได้โดยเครื่องรับสัญญาณวิทยุมีค่า

$$\bar{r} = \frac{\phi\lambda_{L1}}{2\pi}, \quad \left( -\frac{\lambda_{L1}}{2} < \bar{r} < \frac{\lambda_{L1}}{2} \right) \quad (3.4.2)$$

โดยที่  $\bar{r}$  เป็นค่ามอดุโลของระยะทางแตกต่างจริง (*true modulo path difference*)

ค่าระยะทางแตกต่างจริง(*true path difference, r*) ตามสมการ(3.4.1) สามารถแสดงในรูปแบบของผลคูณจุดเวกเตอร์

$$r = \bar{r} + n\lambda_{L1} \equiv (\mathbf{s}_B \cdot \mathbf{b}_B) \quad (3.4.3)$$

โดยที่  $\mathbf{s}_B$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้จากเบสไลน์สายอากาศไปยังดาวเทียมจีพีเอส โดยอ้างอิงในระบบพิกัดของตัวดาวเทียมวงโคจรโลกตัวเอง

$\mathbf{b}_B$  เป็นเวกเตอร์เบสไลน์สายอากาศ อ้างอิงในระบบพิกัดของตัวดาวเทียมวงโคจรโลกตัวเอง

สมการข้างต้นสามารถแสดงในรูปสมการที่แสดงเมทริกซ์การวางตัว

$$r = \bar{r} + n\lambda_{L1} = (\mathbf{A}\mathbf{s}_O \cdot \mathbf{b}_B) \equiv \mathbf{b}_B^T \mathbf{A}\mathbf{s}_O \quad (3.4.4)$$

โดยที่  $\mathbf{A}$  เป็นเมทริกซ์การวางตัว,  $\mathbf{s}_O$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้จากเบสไลน์สายอากาศไปยังดาวเทียมจีพีเอส โดยอ้างอิงในระบบพิกัดของวงโคจร (*orbit-define coordinate*)

เมื่อพิจารณาสัญญาณรบกวนคลื่นวิทยุ สัญญาณคลื่นหลายทิศทาง (multipath signals) และไลน์ไบแอส (line bias : เฟสออฟเซตระหว่างสายนำสัญญาณคลื่นวิทยุของสายอากาศทั้งสอง) โดยทั่วไป ค่าไลน์ไบแอสของข้อมูลการวัดจะมีค่าเท่ากันในกรณีที่ทำกรวัดจากสายอากาศคู่เดียวกัน

ดังนั้นกรณีที่มีความผิดพลาดในการวัด ค่าระยะทางแตกต่างแสดงได้ตามสมการ

$$r_{RX} = (\bar{r} + w + \bar{\beta}) + n\lambda_{L1} \quad (3.4.5)$$

โดยที่  $r_{RX}$  เป็นค่าระยะทางแตกต่าง ที่รวมผลของค่าความผิดพลาดของการวัด

จากสมการข้างต้น สังเกตได้ว่า ถ้าค่ามอดูโลของระยะทางแตกต่างจริง  $\bar{r}$  มีค่าเข้าใกล้ขอบของ  $\pm \lambda_{L1}/2$  ค่าความผิดพลาดของการวัด ( $w + \bar{\beta}$ ) สามารถที่จะทำให้ผลรวมของ  $(\bar{r} + w + \bar{\beta})$  เกิดการเลื่อนไปอีกไซเคิลของ  $\pm \lambda_{L1}/2$  ดังนั้นสมการ (3.4.5) สามารถแสดงใหม่ได้เป็น

$$r_{RX} = \bar{r}_{RX} + k\lambda_{L1} \quad (3.4.6)$$

โดยที่  $\bar{r}_{RX}$  เป็นค่ามอดูโลของระยะทางแตกต่าง ที่วัดได้จากเครื่องรับสัญญาณจีพีเอส

$k$  เป็นจำนวนเต็มลูกคลื่นของเฟสแตกต่างที่ไม่ทราบค่า (กรณีที่มีความผิดพลาดในการวัด)

ค่าจำนวนเต็มลูกคลื่น  $k$  เป็นไปได้สองกรณีดังแสดงตามสมการ

$$k = \begin{cases} n \text{ or } n+1, & \text{for } \bar{r}_{RX} > 0 \\ n \text{ or } n-1, & \text{for } \bar{r}_{RX} < 0 \end{cases} \quad (3.4.7)$$

### การประยุกต์ใช้เฟสแตกต่างของสัญญาณคลื่นพาร์สำหรับการคำนวณตำแหน่งของดาวเทียม

จากสมการ (3.4.4) และ (3.4.6) สมการระยะทางแตกต่าง แสดงใหม่ได้เป็น

$$r_{RX} = \bar{r}_{RX} + k\lambda_{L1} \equiv \mathbf{b}_B^T \mathbf{A} \mathbf{s}_O \quad (3.4.8)$$

จากสมการข้างต้น เวกเตอร์เบสไลน์สายอากาศ  $\mathbf{b}_B$  เป็นพารามิเตอร์ที่ทราบแล้ว ถ้าทราบค่าจำนวนเต็ม  $k$  จะส่งผลให้เมทริกซ์การวางตัว  $\mathbf{A}$  และ ระยะทางแตกต่าง  $r_{RX}$  สามารถคำนวณได้ ดังนั้นเวกเตอร์ไลน์ออฟเซตสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\mathbf{s}_O = \mathbf{A}^T \mathbf{b}_B (r_{RX}) (\mathbf{A}^T \mathbf{b}_B \mathbf{b}_B^T \mathbf{A})^{-1} \quad (3.4.9)$$

เวกเตอร์ไลน์ออฟไซท์แสดงในรูปสมการของตำแหน่งดาวเทียม

$$\frac{\mathbf{r}_{GPS} - \mathbf{r}_{LEO}}{\|\mathbf{r}_{GPS} - \mathbf{r}_{LEO}\|} = (r_{RX}) (\mathbf{A}^T \mathbf{b}_B) (\mathbf{A}^T \mathbf{b}_B \mathbf{b}_B^T \mathbf{A})^{-1} \quad (3.4.10)$$

โดยที่  $\mathbf{r}_{LEO}$  เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำ

$\mathbf{r}_{GPS}$  เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเทียมจีพีเอส

จากสมการ (3.4.10) สังเกตได้ว่า ถ้าเราสามารถคำนวณหาค่าจำนวนเต็ม  $k$  ได้ เมทริกซ์การวางตัว  $\mathbf{A}$  และ ระยะทางแตกต่าง  $r_{RX}$  จะสามารถคำนวณได้ จากนั้นเราสามารถที่จะคำนวณหา  $\mathbf{r}_{LEO}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำที่เราต้องการทราบ

ดังนั้นการที่จะนำระยะทาง(เฟส)แตกต่างมาใช้ในการคำนวณหาเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำ จำเป็นที่จะต้องคำนวณหาค่าจำนวนเต็ม  $k$  ให้ได้เป็นอย่างแรก ซึ่งในการคำนวณหาการวางตัวของดาวเทียมเองโดยใช้ระยะทาง(เฟส)แตกต่างเป็นข้อมูลการวัดนั้น ก็จะต้องคำนวณหาค่าจำนวนเต็ม  $k$  ให้ได้เช่นกัน ดังนั้นกล่าวได้ว่าการคำนวณหาค่าจำนวนเต็ม  $k$  เป็นปัญหาที่จะต้องทำการแก้ไขเป็นสิ่งแรกสำหรับการที่จะนำระยะทาง(เฟส)แตกต่างมาใช้เป็นข้อมูลการวัด

