บทที่ ๔

แบบจำลองเชิงวิเคราะห์และวิธีวิเคราะห์ที่ใช้งานวิจัย

เนื้อหาในบทนี้เป็นการอธิบายและแสดงแบบจำลองต่างๆ รวมไปถึงวิธีวิเคราะห์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ โดยประกอบด้วยแบบจำลองเชิงวิเคราะห์ของผลการรบกวนที่เกิดจากความไม่กลมของโลก ซึ่งในงานวิจัยนี้ ได้พิจารณาผลของทั้งโซนอลฮาร์มอนิก เทสเซลอลฮาร์มอนิก และเซกทอเรียลฮาร์มอนิก นอกจากการรบกวนที่เกิดจากความไม่กลมของโลกแล้ว ฝุ่นอวกาศเป็นอีกปัจจัยที่ส่งผลให้เกิดการรบกวนการเคลื่อนที่ของดาวเทียม สำหรับในส่วนของการประมาณค่า นักวิจัยได้พัฒนาวิธีการคำนวณที่ใช้รูปแบบการประมาณค่าที่ไม่เป็นเชิงเส้นแบบกำลังสองน้อยที่สุด เพื่อหาตำแหน่งของดาวเทียมซึ่งจะถูกนำไปใช้เป็นค่าเริ่มต้นของตัวกรองประมาณค่า โดยตัวกรองประมาณค่าที่พัฒนาขึ้นเป็นตัวกรองคาลมานที่ใช้แบบจำลองเชิงวิเคราะห์ของผลการรบกวนที่เกิดจากความไม่กลมของโลกและฝุ่นอวกาศเป็นแบบจำลองของระบบ และใช้ระยะเสมือนเป็นข้อมูลการวัดสำหรับระบบ

นอกจากการวิจัยที่กล่าวในข้างต้น ในแผนงานวิจัยต่อเนื่องได้กล่าวถึงการนำค่าความแตกต่างเฟสของสัญญาณพาห์จีพีเอสที่วัดจากสายอากาศสองชุดมาเป็นข้อมูลการวัดของระบบ อย่างไรก็ตาม ถ้าระยะระหว่างสายอากาศมีความยาวมากกว่าค่าความยาวคลื่นของสัญญาณพาห์จีพีเอส ส่งผลให้จำนวนลูกคลื่นของเฟสแตกต่างดังกล่าวไม่สามารถวัดได้โดยเครื่องรับจีพจีเอส ทำให้จำเป็นที่จะต้องหาค่าจำนวนลูกคลื่นก่อนที่จะนำข้อมูลการวัดมาใช้งาน ซึ่งงานวิจัยนี้ได้นำเสนอแนวทางใหม่ในการหาค่าจำนวนลูกคลื่นดังกล่าว

๔.๑ แบบจำลองเชิงวิเคราะห์ของผลการรบกวนที่เกิดจากความไม่กลมของโลก

รูปแบบสมการการเคลื่อนที่ ที่รวมผลของการรบกวนสามารถแสดงได้ตามสมการ

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{a}_{pr} \tag{4.1.1}$$

โดยที่ $\mu_{\oplus}$ เป็นพารามิเตอร์ของความโน้มถ่วง, $\mathbf{a}_{pr}$ เป็นผลรวมของความเร่งที่รบกวนวงโคจรดาวเทียม

$\mathbf{r}$ เป็นเวคเตอร์ของระยะระหว่างโลกและดาวเทียม โดยมีทิศชี้ไปที่ดาวเทียม

r เป็นระยะขจัดของเวคเตอร์ $\mathbf{r}$

เนื่องจากรูปพรรณสัณฐานของโลกมีลักษณะไม่เป็นทรงกลม ซึ่งอธิบายได้โดยแบบจำลองศักย์โน้มถ่วงโลกที่แสดงตามสมการ (3.1.22) โดยในเชิงคณิตศาสตร์ ผลลัพธ์ของเกรเดียนต์ศักย์โน้มถ่วงจะเป็นค่าความเร่ง ซึ่งพิจารณาเป็นความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียม ($\mathbf{a}_{pr}$) ซึ่งเกิดจากศักย์โน้มถ่วงของโลก

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{pr} = \nabla U &= \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} \\ &\equiv \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

โดยที่ ∇ เป็นสัญลักษณ์เกรเดียนต์, U เป็นฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลกตามสมการ (3.1.22)

$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในแกน x, y, z ตามลำดับ

a_x, a_y, a_z เป็นความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมในแกน x, y, z ตามลำดับ

๔.๑.๑ โซนอลฮาร์มอนิก

เมื่อพิจารณาผลการรบกวนที่เกิดจากโซนอลฮาร์มอนิก โดยเฉพาะลำดับที่สอง (n = 2) ตามสมการ (3.1.22) ดังนั้นฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลกที่พิจารณาเฉพาะเทอม J_2 สามารถลดรูปสมการได้เป็น

$$U_{J_2} = -J_2 \frac{\mu_\oplus}{r}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 P_2(\sin\phi_{sat}) \tag{4.1.3}$$

จากเทอมพหุนามเลอช็องดร์ $P_2(\gamma) = \frac{1}{2}\left(3\gamma^2 - 1\right)$ ดังนั้นฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงกรณีสำหรับ J_2

$$U_{J_2} = -\frac{J_2}{2}\frac{\mu_\oplus}{r}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 (3\sin^2\phi_{sat} - 1) \tag{4.1.4}$$

จากสมการ (3.1.22) และเทอมพหุนามเลอช็องดร์ ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลกเมื่อพิจารณาเฉพาะเทอมโซนอลฮาร์มอนิกอันดับที่สองถึงอันดับที่สี่ สามารถแสดงได้ตามตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงเมื่อพิจารณาเฉพาะเทอมโซนอลฮาร์มอนิกอันดับที่สองถึงอันดับที่สี่

อันดับที่ n	ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลก U_{J_n}
2	$U_{J_2} = -\frac{J_2}{2}\frac{\mu_\oplus}{r}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 (3\sin^2\phi_{sat} - 1)$
3	$U_{J_3} = -\frac{J_3}{2}\frac{\mu_\oplus}{r}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^3 \left(5\sin^3\phi_{sat} - 3\sin\phi_{sat}\right)$
4	$U_{J_4} = -\frac{J_4}{8}\frac{\mu_\oplus}{r}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^4 \left(35\sin^4\phi_{sat} - 30\sin^2\phi_{sat} + 3\right)$

ค่าสัมประสิทธิ์ของ J_n ตามแบบจำลองโลก EGM-96 (Earth Geopotential Model) ซึ่งพัฒนาโดยความร่วมมือระหว่าง NASA GSFC และ NIMA แสดงในตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 ค่าสัมประสิทธิ์ของเทอมโซนอลฮาร์มอนิกอันดับที่สองถึงอันดับที่แปด (EGM-96)

อันดับที่ n	ค่าสัมประสิทธิ์ของเทอมโซนอลฮาร์มอนิก
2	J_2 = 1.08262668355 × 10^{-3}
3	J_3 = -2.53265648533 × 10^{-6}
4	J_4 = -1.61962159137 × 10^{-6}

๔.๑.๒ เทสเซลอลฮาร์มอนิก (กรณี $n \neq m$)

จากสมการ (3.1.22) และเทอมพหุนามเลอช็องดร์ ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลกเมื่อพิจารณาเฉพาะเทอมเทสเซลอลฮาร์มอนิกแสดงได้ตามตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงเมื่อพิจารณาเฉพาะเทสเซลอลฮาร์มอนิกอันดับที่สองถึงอันดับที่สี่

อันดับ (n,m)	ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลก $U_{J_{n,m}}$
(2,1)	$U_{2,1} = J_{2,1}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^2 3\sin(\phi_{sat})\cos(\phi_{sat})\cos\left[(\lambda_{sat}-\lambda_{2,1})\right]$
(3,1)	$U_{3,1} = J_{3,1}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^3 \dfrac{1}{2}\cos(\phi_{sat})\left[15\sin^2(\phi_{sat})-3\right]\cos\left[(\lambda_{sat}-\lambda_{3,1})\right]$
(3,2)	$U_{3,2} = J_{3,2}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^3 15\cos^2(\phi_{sat})\sin(\phi_{sat})\cos\left[2(\lambda_{sat}-\lambda_{3,2})\right]$
(4,1)	$U_{4,1} = J_{4,1}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^4 \dfrac{5}{2}\cos(\phi_{sat})\left[7\sin^3(\phi_{sat})-3\sin(\phi_{sat})\right]\cos\left[(\lambda_{sat}-\lambda_{4,1})\right]$
(4,2)	$U_{4,2} = J_{4,2}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^4 \dfrac{15}{2}\cos^2(\phi_{sat})\left[7\sin^2(\phi_{sat})-1\right]\cos\left[2(\lambda_{sat}-\lambda_{4,2})\right]$
(4,3)	$U_{4,3} = J_{4,3}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^4 105\cos^3(\phi_{sat})\sin(\phi_{sat})\cos\left[3(\lambda_{sat}-\lambda_{4,3})\right]$
หมายเหตุ	$\lambda_{n,m} = \dfrac{\arctan(S_{n,m}/C_{n,m})}{m} \quad ; \quad J_{n,m}^2 = C_{n,m}^2 + S_{n,m}^2$

ค่าสัมประสิทธิ์ของ $C_{n,m}$ และ $S_{n,m}$ ตามแบบจำลองโลก EGM-96 แสดงในตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 ค่าสัมประสิทธิ์ของเทอม $C_{n,m}$ และ $S_{n,m}$ (EGM-96)

ค่าสัมประสิทธิ์ $C_{n,m}$	ค่าสัมประสิทธิ์ $S_{n,m}$
$C_{2,1}$ = -2.41400000000 $\times 10^{-10}$	$S_{2,1}$ = 1.54310000000 $\times 10^{-9}$
$C_{2,2}$ = 1.57446037456 $\times 10^{-6}$	$S_{2,2}$ = -9.03803806639 $\times 10^{-7}$
$C_{3,1}$ = 2.19263852917 $\times 10^{-6}$	$S_{3,1}$ = 2.68424890297 $\times 10^{-7}$
$C_{3,2}$ = 3.08989206881 $\times 10^{-7}$	$S_{3,2}$ = -2.11437612437 $\times 10^{-7}$
$C_{3,3}$ = 1.00548778064 $\times 10^{-7}$	$S_{3,3}$ = 1.97222559006 $\times 10^{-7}$
$C_{4,1}$ = -5.08799360404 $\times 10^{-7}$	$S_{4,1}$ = -4.49144872839 $\times 10^{-7}$

$C_{4,2} = 7.84175859844\times10^{-8}$	$S_{4,2} = 1.48177868296\times10^{-7}$
$C_{4,3} = 5.92099402629\times10^{-8}$	$S_{4,3} = -1.20077667634\times10^{-8}$
$C_{4,4} = -3.98407411766\times10^{-9}$	$S_{4,4} = 6.52571425370\times10^{-9}$

๔.๑.๓ เซกทอเรียลฮาร์มอนิก (กรณี $n = m$)

จากสมการ (3.1.22) และเทอมพหุนามเลอช็องดร์ ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลก เมื่อพิจารณาเฉพาะเทอมเซกทอเรียลฮาร์มอนิกแสดงได้ตามตารางที่ 4.5

ตารางที่ 4.5 ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงเมื่อพิจารณาเฉพาะเซกทอเรียลฮาร์มอนิกอันดับที่สองถึงอันดับที่สี่

อันดับ (n,m)	ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลก $U_{J_{n,m}}$
(2,2)	$U_{2,2} = J_{2,2}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^2 3\cos^2(\phi_{sat})\cos\left[2(\lambda_{sat}-\lambda_{2,2})\right]$
(3,3)	$U_{3,3} = J_{3,3}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^3 15\cos^3(\phi_{sat})\cos\left[3(\lambda_{sat}-\lambda_{3,3})\right]$
(4,4)	$U_{4,4} = J_{4,4}\dfrac{\mu_\oplus}{r}\left(\dfrac{R_\oplus}{r}\right)^4 105\cos^4(\phi_{sat})\cos\left[4(\lambda_{sat}-\lambda_{4,4})\right]$
หมายเหตุ	$\lambda_{n,m} = \dfrac{\arctan(S_{n,m}/C_{n,m})}{m}$; $J_{n,m}^2 = C_{n,m}^2 + S_{n,m}^2$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ของ $C_{n,m}$ และ $S_{n,m}$ ตามแบบจำลองโลก EGM-96 แสดงในตารางที่ 4.4

๔.๑.๔ สมการความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียม

จากสมการ (4.1.2) ความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมของกรณีต่างๆแสดงในตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 ความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมของกรณีต่างๆ

เงื่อนไข	สมการความเร่ง
กรณีวัตถุสองชิ้น	$\mathbf{a}_{\text{2body}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mu_\oplus x}{r^3} & -\dfrac{\mu_\oplus y}{r^3} & -\dfrac{\mu_\oplus z}{r^3} \end{bmatrix}^T$

ตารางที่ 4.6 ความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมของกรณีต่างๆ (ต่อเนื่อง…)

เงื่อนไข	สมการความเร่ง
โซนอลฮาร์มอนิก (J_2)	$$a_{x(J2)}=\frac{3J_2\mu_{\oplus}x}{2r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2\left(\frac{5z^2}{r^2}-1\right)$$ $$a_{y(J2)}=\frac{y}{x}a_{x(J2)}$$ $$a_{z(J2)}=\frac{3J_2\mu_{\oplus}z}{2r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2\left(\frac{5z^2}{r^2}-3\right)$$
โซนอลฮาร์มอนิก (J_3)	$$a_{x(J3)}=\frac{5J_3\mu_{\oplus}x}{2r^4}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left(\frac{7z^3}{r^2}-3z\right)$$ $$a_{y(J3)}=\frac{y}{x}a_{x(J3)}$$ $$a_{z(J3)}=\frac{J_3\mu_{\oplus}}{2r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left(\frac{35z^4}{r^4}-\frac{30z^2}{r^2}+3\right)$$
โซนอลฮาร์มอนิก (J_4)	$$a_{x(J4)}=\frac{J_4\mu_{\oplus}x}{8r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left(\frac{315z^4}{r^4}-\frac{210z^2}{r^2}+15\right)$$ $$a_{y(J4)}=\frac{y}{x}a_{x(J4)}$$ $$a_{z(J4)}=\frac{J_4\mu_{\oplus}z}{8r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left(\frac{315z^4}{r^4}-\frac{350z^2}{r^2}+75\right)$$

ตารางที่ 4.6 ความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมของกรณีต่างๆ (ต่อเนื่อง…)

เงื่อนไข	สมการความเร่ง
เทสเซลอลฮาร์มอนิก ($J_{2,1}$)	$$a_{x(J2,1)} = a_{x1(J2,1)} + a_{x2(J2,1)}$$ $$a_{x1(J2,1)} = \frac{3J_{2,1}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2\left[\frac{1}{Y}-\frac{5Y}{r^2}\right]xz\cos\left(G_{2,1}\right)$$ $$a_{x2(J2,1)} = \frac{3J_{2,1}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2\left[\frac{zyY\sin\left(G_{2,1}\right)}{x^2D}\right]$$ $$a_{y(J2,1)} = \frac{y}{x}a_{x(J2,1)} - \frac{x}{y}a_{x2(J2,1)}$$ $$a_{z(J2,1)} = \frac{3J_{2,1}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2\left[1-5\frac{z^2}{r^2}\right]Y\cos\left(G_{2,1}\right)$$ $$G_{2,1} = \arctan\left(y/x\right) - \arctan\left(S_{2,1}/C_{2,1}\right)$$ $$D = 1+\left(y^2/x^2\right)$$ $$Y = \sqrt{x^2+y^2}$$
เทสเซลอลฮาร์มอนิก ($J_{3,1}$)	$$a_{x(J3,1)} = a_{x1(J3,1)} + a_{x2(J3,1)}$$ $$a_{x1(J3,1)} = \frac{3}{2}\frac{J_{3,1}\mu_{\oplus}}{r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3 \cdot \left[\frac{5z^2}{r^2}\left(\frac{1}{Y}-\frac{7Y}{r^2}\right)+\left(\frac{5Y}{r^2}-\frac{1}{Y}\right)\right]x\cos\left(G_{3,1}\right)$$ $$a_{x2(J3,1)} = \frac{3}{2}\frac{J_{3,1}\mu_{\oplus}}{r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left[\left(5\frac{z^2}{r^2}-1\right)\frac{yY\sin\left(G_{3,1}\right)}{x^2D}\right]$$ $$a_{y(J3,1)} = \frac{y}{x}a_{x(J3,1)} - \frac{x}{y}a_{x2(J3,1)}$$ $$a_{z(J3,1)} = \frac{5}{2}\frac{J_{3,1}\mu_{\oplus}}{r^4}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left[1-21\frac{z^2}{r^2}\right]zY\cos\left(G_{3,1}\right)$$ $$G_{3,1} = \arctan\left(y/x\right) - \arctan\left(S_{3,1}/C_{3,1}\right)$$ $$D = 1+\left(y^2/x^2\right)$$ $$Y = \sqrt{x^2+y^2}$$

ตารางที่ 4.6 ความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมของกรณีต่างๆ (ต่อเนื่อง...)

เงื่อนไข	สมการความเร่ง
เทสเซลอลฮาร์มอนิก ($J_{3,2}$)	$a_{x(J3,2)} = a_{x1(J3,2)} + a_{x2(J3,2)}$ $a_{x1(J3,2)} = \frac{J_{3,2}\mu_{\oplus}}{r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left[\frac{15z}{r^2}\left(7\frac{z^2}{r^2}-5\right)\right]x\cos\left(G_{3,2}\right)$ $a_{x2(J3,2)} = \frac{J_{3,2}\mu_{\oplus}}{r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left[\frac{30z}{x^2D}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\right]y\sin\left(G_{3,2}\right)$ $a_{y(J3,2)} = \frac{y}{x}a_{x(J3,2)} - \frac{x}{y}a_{x2(J3,2)}$ $a_{z(J3,2)} = 15\frac{J_{3,2}\mu_{\oplus}}{r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left[1-\frac{z^2}{r^2}\left(8+7\frac{z^2}{r^2}\right)\right]\cos\left(G_{3,2}\right)$ $G_{3,2} = 2\arctan\left(y/x\right) - 2\arctan\left(S_{3,2}/C_{3,2}\right)$ $D = 1+\left(y^2/x^2\right)$
เทสเซลอลฮาร์มอนิก ($J_{4,1}$)	$a_{x(J4,1)} = a_{x1(J4,1)} + a_{x2(J4,1)}$ $a_{x1(J4,1)} = \frac{5}{2}\frac{J_{4,1}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4 \cdot$ $\left[\frac{z}{Y}\left(\frac{7z^2}{r^2}-3\right)+\frac{21zY}{r^2}\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)\right]x\cos\left(G_{4,1}\right)$ $a_{x2(J4,1)} = \frac{5}{2}\frac{J_{4,1}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[\frac{Yz}{x^2D}\left(\frac{7z^2}{r^2}-3\right)\right]y\sin\left(G_{4,1}\right)$ $a_{y(J4,1)} = \frac{y}{x}a_{x(J4,1)} - \frac{x}{y}a_{x2(J4,1)}$ $a_{z(J4,1)} = \frac{15}{2}\frac{J_{4,1}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[\frac{z^2}{r^2}\left(14-21\frac{z^2}{r^2}\right)-1\right]Y\cos\left(G_{4,1}\right)$ $G_{4,1} = \arctan\left(y/x\right) - \arctan\left(S_{4,1}/C_{4,1}\right)$ $D = 1+\left(y^2/x^2\right)$ $Y = \sqrt{x^2+y^2}$

ตารางที่ 4.6 ความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมของกรณีต่างๆ (ต่อเนื่อง...)

เงื่อนไข	สมการความเร่ง
เทสเซลอลฮาร์มอนิก ($J_{4,2}$)	$a_{x(J4,2)} = a_{x1(J4,2)} + a_{x2(J4,2)}$ $a_{x1(J4,2)} = \frac{15}{2}\frac{J_{4,2}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[\frac{z^2}{r^2}\left(\frac{63z^2}{r^2}-56\right)+5\right]x\cos\left(G_{4,2}\right)$ $a_{x2(J4,2)} = \frac{J_{4,2}\mu_{\oplus}}{r}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[\frac{5z^2}{x^2Dr^2}\left(24-21\frac{z^2}{r^2}\right)-\frac{3}{x^2D}\right]y\sin\left(G_{4,2}\right)$ $a_{y(J4,2)} = \frac{y}{x}a_{x(J4,2)} - \frac{x}{y}a_{x2(J4,2)}$ $a_{z(J4,2)} = \frac{315}{2}\frac{J_{4,2}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[\frac{z^2}{r^2}\left(3\frac{z^2}{r^2}-4\right)+1\right]z\cos\left(G_{4,2}\right)$ $G_{4,2} = 2\arctan\left(y/x\right)-\arctan\left(S_{4,2}/C_{4,2}\right)$ $D = 1+\left(y^2/x^2\right)$
เทสเซลอลฮาร์มอนิก ($J_{4,3}$)	$a_{x(J4,3)} = a_{x1(J4,3)} + a_{x2(J4,3)}$ $a_{x1(J4,3)} = 105\frac{J_{4,3}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4 \cdot$ $\left[\frac{1}{Y}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)+\frac{Y}{r^2}\left(\frac{9z^2}{r^2}-7\right)\right]zx\cos\left(G_{4,3}\right)$ $a_{x2(J4,3)} = 315\frac{J_{4,1}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[\frac{zY}{x^2D}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\right]y\sin\left(G_{4,3}\right)$ $a_{y(J4,3)} = \frac{y}{x}a_{x(J4,3)} - \frac{x}{y}a_{x2(J4,3)}$ $a_{z(J4,3)} = \frac{J_{4,3}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[105\left(1-\frac{z^2}{r^2}\left(10+9\frac{z^2}{r^2}\right)\right)\right]Y\cos\left(G_{4,3}\right)$ $G_{4,3} = 3\arctan\left(y/x\right)-\arctan\left(S_{4,3}/C_{4,3}\right)$ $D = 1+\left(y^2/x^2\right)$ $Y = \sqrt{x^2+y^2}$

ตารางที่ 4.6 ความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมของกรณีต่างๆ (ต่อเนื่อง...)

เงื่อนไข	สมการความเร่ง
เซกทอเรียลฮาร์มอนิก ($J_{2,2}$)	$a_{x(J2,2)} = a_{x1(J2,2)} + a_{x2(J2,2)}$ $a_{x1(J2,2)} = \frac{3J_{2,2}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2\left[5\frac{z^2}{r^2}-3\right]x\cos\left(G_{2,2}\right)$ $a_{x2(J2,2)} = \frac{3J_{2,2}\mu_{\oplus}}{r}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2\left[\frac{2}{x^2D}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\right]y\sin\left(G_{2,2}\right)$ $a_{y(J2,2)} = \frac{y}{x}a_{x1(J2,2)} + \frac{x}{y}a_{x2(J2,2)}$ $a_{z(J2,2)} = \frac{J_{2,2}\mu_{\oplus}}{r}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2\left[\frac{15}{r^2}\left(\frac{z^2}{r^2}-1\right)\right]z\cos\left(G_{2,2}\right)$ $G_{2,2} = 2\arctan\left(y/x\right) - \arctan\left(S_{2,2}/C_{2,2}\right)$ $D = 1+\left(y^2/x^2\right)$
เซกทอเรียลฮาร์มอนิก ($J_{3,3}$)	$a_{x(J3,3)} = a_{x1(J3,3)} + a_{x2(J3,3)}$ $a_{x1(J3,3)} = 15\frac{J_{3,3}\mu_{\oplus}}{r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3 \cdot$ $\left[\frac{1}{Y}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)+\frac{Y}{r^2}\left(\frac{7z^2}{r^2}-5\right)\right]x\cos\left(G_{3,3}\right)$ $a_{x2(J3,3)} = \frac{J_{3,3}\mu_{\oplus}}{r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left[\frac{45Y}{x^2D}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\right]y\sin\left(G_{3,3}\right)$ $a_{y(J3,3)} = \frac{y}{x}a_{x1(J3,3)} + \frac{x}{y}a_{x2(J3,3)}$ $a_{z(J3,3)} = \frac{J_{3,3}\mu_{\oplus}}{r^2}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^3\left[\frac{105Y}{r^2}\left(\frac{z^2}{r^2}-1\right)\right]z\cos\left(G_{3,3}\right)$ $G_{3,3} = 3\arctan\left(y/x\right) - \arctan\left(S_{3,3}/C_{3,3}\right)$ $D = 1+\left(y^2/x^2\right)$ $Y = \sqrt{x^2+y^2}$

ตารางที่ 4.6 ความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมของกรณีต่างๆ (ต่อเนื่อง…)

เงื่อนไข	สมการความเร่ง
เซกทอเรียลฮาร์มอนิก ($J_{4,4}$)	$a_{x(J4,4)} = a_{x1(J4,4)} + a_{x2(J4,4)}$ $a_{x1(J4,4)} = 5\dfrac{J_{4,4}\mu_{\oplus}}{r^3}\left(\dfrac{R_{\oplus}}{r}\right)^4 \cdot \left[\dfrac{z^2}{r^2}\left(294-189\dfrac{z^2}{r^2}\right)-105\right]x\cos\left(G_{4,4}\right)$ $a_{x2(J4,4)} = \dfrac{J_{4,4}\mu_{\oplus}}{r}\left(\dfrac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[\dfrac{420}{x^2 D}\left(1+\dfrac{z^2}{r^2}\left(\dfrac{z^2}{r^2}-2\right)\right)\right]y\sin\left(G_{3,3}\right)$ $a_{y(J4,4)} = \dfrac{y}{x}a_{x1(J4,4)} + \dfrac{x}{y}a_{x2(J4,4)}$ $a_{z(J4,4)} = \dfrac{J_{4,4}\mu_{\oplus}}{r}\left(\dfrac{R_{\oplus}}{r}\right)^4\left[\dfrac{945}{r^2}\left(1+\dfrac{z^2}{r^2}\left(2-\dfrac{z^2}{r^2}\right)\right)\right]z\cos\left(G_{4,4}\right)$ $G_{4,4} = 4\arctan\left(y/x\right)-\arctan\left(S_{4,4}/C_{4,4}\right)$ $D = 1+\left(y^2/x^2\right)$

๔.๒ แบบจำลองเชิงวิเคราะห์ของผลการรบกวนที่เกิดจากฝุ่นอวกาศ

ดังที่อธิบายไว้ในบทที่ ๓ ความไม่เป็นทรงกลมของโลกเองได้ส่งผลรบกวนการเคลื่อนที่ของดาวเทียม โดยการรบกวนดังกล่าวจะมีขนาดใหญ่ที่สุดและมีผลมากที่สุดต่อวงโคจรดาวเทียมที่อยู่ใกล้โลก ซึ่งเป็นวงโคจรที่เราพิจารณาในงานวิจัยนี้ นอกจากความไม่เป็นทรงกลมของโลกแล้ว ฝุ่นอวกาศเป็นอีกปัจจัยที่ส่งผลให้เกิดการรบกวนการเคลื่อนที่ของดาวเทียมโดยมีขนาดของการรบกวนลดลงมา อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาและวิเคราะห์วงโคจรในช่วงเวลาท้ายๆอายุขัยของดาวเทียมแล้ว ดาวเทียมได้มีการเคลื่อนต่ำลงมาสู่ชั้นบรรยากาศ ส่งผลให้การรบกวนที่เกิดจากฝุ่นอวกาศจะมีขนาดใหญ่กว่าความไม่เป็นทรงกลมของโลกเสียอีก

ดังนั้นเพื่อให้การคำนวณตำแหน่งของดาวเทียมมีความแม่นยำและถูกต้องมากขึ้น จำเป็นที่จะต้องนำแบบจำลองความหนาแน่นบรรยากาศ (atmospheric density) มาใช้ร่วมในการคำนวณ <u>โดยที่แบบจำลองความหนาแน่นบรรยากาศดังกล่าวจะต้องมีความถูกต้องในระดับหนึ่ง</u> สาเหตุที่กล่าวเช่นนี้ก็

เนื่องจากในความเป็นจริงแล้ว แบบจำลองความหนาแน่นบรรยากาศที่มีความแม่นยำสูงมากๆนั้นไม่มี โดยสืบเนื่องมาจากการที่จะทำนายหรือวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของบรรยากาศโลกนั้นเป็นเรื่องที่ยากมาก ผลจากความร้อนของดวงอาทิตย์ต่อชั้นบรรยากาศ รวมไปถึงสนามแม่เหล็กโลก ล้วนแต่ส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของบรรยากาศโลก

นอกจากปัญหาข้างต้นแล้ว การพิจารณาและการวิเคราะห์ถึงผลของฝุ่นอวกาศที่ส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของดาวเทียมก็เป็นอีกประเด็นหนึ่งที่มีความซับซ้อน โดยมีสาเหตุเนื่องมากจากพลังงานของการเคลื่อนที่จะมีการสูญเสียไปเนื่องจากการเสียดทานที่เกิดจากดาวเทียมเคลื่อนผ่านฝุ่นอวกาศ ทำให้การรบกวนที่เกิดจากฝุ่นอวกาศไม่เป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงาน (ต่างจากการรบกวนที่เกิดจากความไม่เป็นทรงกลมของโลก)

สมการพลวัตของฝุ่นอวกาศในรูปของความเร่งแสดงได้ตามสมการ [Long *et al*., 1989]

$$\mathbf{a}_{drag} = -\frac{1}{2} C_{drag} \frac{A_{cross}}{m_{sat}} \rho_{drag} \left\| \mathbf{v}_{rel} \right\| \mathbf{v}_{rel} \tag{4.2.1}$$

โดยที่ C_{drag} เป็นสัมประสิทธิ์ของฝุ่นอวกาศ (ไม่มีหน่วย)

A_{cross} เป็นพื้นที่ตัดขวาง(ของดาวเทียม)ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ความเร็วของดาวเทียม

m_{sat} เป็นมวลของดาวเทียม

ρ_{drag} เป็นความหนาแน่นของชั้นบรรยากาศ โดยมีค่าขึ้นอยู่กับความสูง

$\mathbf{v}_{rel}$ เป็นเวกเตอร์ความเร็วที่สัมพันธ์กับบรรยากาศ

ในการหาค่าความเร็วสัมพันธ์ดังกล่าว จำเป็นที่จะต้องพิจารณาการเคลื่อนที่ของตัวบรรยากาศเอง โดยการเคลื่อนที่ดังกล่าวเกิดจากการหมุนของโลกและลมที่เคลื่อนที่ในชั้นบรรยากาศ

$$\mathbf{v}_{rel} = \left[\frac{dx}{dt} + \omega_{\oplus} y \quad \frac{dy}{dt} - \omega_{\oplus} x \quad \frac{dz}{dt} \right]^T \tag{4.2.2}$$

โดยที่ $\omega_{\oplus}$ เป็นความเร็วเชิงมุมของโลก มีค่า $7.292\,115 \times 10^{-5} \pm 1.5 \times 10^{-12}$ rad/s

(x, y, z) เป็นพิกัดตำแหน่งของดาวเทียมในระบบพิกัด ECI

สำหรับงานวิจัยนี้ดาวเทียมในวงโคจรโลกต่ำที่พิจารณาอยู่ที่ความสูงประมาณ 600 กิโลเมตร ถึง 700 กิโลเมตร ค่าความหนาแน่นของชั้นบรรยากาศ ρ_{drag} ตามแบบจำลองของ Harris-Priester [Long *et al*., 1989] แสดงในตาราง 4.7 สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ของฝุ่นอวกาศ C_{drag} ตามแบบจำลอง flat plate mode สำหรับชั้นบรรยากาศสูงมีค่าโดยประมาณ 2.2 [Vallado, 1997]

ตาราง 4.7 ค่าความหนาแน่นของชั้นบรรยากาศ ρ_{drag} ตามแบบจำลองของ Harris-Priester

ความสูง (กิโลเมตร)	ค่าความหนาแน่นต่ำสุด (kg/m^3)	ค่าความหนาแน่นสูงสุด (kg/m^3)
600	8.070×10^{-14}	6.390×10^{-13}
620	6.012×10^{-14}	5.123×10^{-13}
640	4.519×10^{-14}	4.121×10^{-13}
660	3.430×10^{-14}	3.325×10^{-13}
680	2.620×10^{-14}	2.691×10^{-13}
700	2.043×10^{-14}	2.185×10^{-13}

๔.๓ วิธีการการประมาณค่าตำแหน่งวงโคจรดาวเทียม

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอการประมาณค่าตำแหน่งวงโคจรดาวเทียม โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น และ ตัวกรองคาลมาน โดยทั้งสองวิธีใช้ข้อมูลรหัสสัญญาณจีพีเอสเป็นข้อมูลการวัด

๔.๓.๑ การประมาณค่า โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น

การประมาณค่าตำแหน่งของดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำ โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น พิจารณาได้จากเปรียบเทียบค่าข้อมูลการวัดที่ประมาณได้กับค่าจริงที่วัดได้

ระยะเสมือน $\rho_k^{(j)}$ ระหว่างดาวเทียมจีพีเอสดวงที่ j กับเครื่องรับจีพีเอส คำนวณได้ตามสมการ

$$\begin{aligned}\rho_k^{(j)} &= \sqrt{\left(x_j - x_u\right)^2 + \left(y_j - y_u\right)^2 + \left(z_j - z_u\right)^2} + ct_u \\ &\equiv f(x_u, y_u, z_u, t_u)\end{aligned} \tag{4.3.1.1}$$

โดยที่ (x_j, y_j, z_j) เป็นตำแหน่งของดาวเทียมจีพีเอสดวงที่ j, (x_u, y_u, z_u) เป็นตำแหน่งของเครื่องรับจีพีเอส, t_u เป็นเวลาคาดเคลื่อนระหว่างฐานเวลาของระบบจีพีเอสและฐานเวลาของเครื่องรับจีพีเอส

เมื่อพิจารณาค่าประมาณของระยะเสมือน $\hat{\rho}_k^{(j)}$ ที่คำนวณได้ตามสมการ

$$\hat{\rho}_k^{(j)} = \sqrt{\left(x_j - \hat{x}_u\right)^2 + \left(y_j - \hat{y}_u\right)^2 + \left(z_j - \hat{z}_u\right)^2} + c\hat{t}_u \equiv f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u) \quad (4.3.1.2)$$

โดยที่ $(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u)$ เป็นค่าประมาณของตำแหน่งของเครื่องรับจีพีเอส, $\hat{t}_u$ เป็นค่าประมาณของ t_u

พิจารณาค่าจริงของตำแหน่งเครื่องรับจีพีเอสและค่าเวลาคาดเคลื่อน (x_u, y_u, z_u, t_u) ในเทอมของค่าประมาณ $(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)$ และค่าคาดเคลื่อน $(\Delta x_u, \Delta y_u, \Delta z_u, \Delta t_u)$

$$\left.\begin{array}{l} x_u = \hat{x}_u + \Delta x_u \quad ; \quad y_u = \hat{y}_u + \Delta y_u \\ z_u = \hat{z}_u + \Delta z_u \quad ; \quad t_u = \hat{t}_u + \Delta t_u \end{array}\right\} \quad (4.3.1.3)$$

ดังนั้นสมการระยะเสมือนระหว่างดาวเทียมจีพีเอสดวงที่ j กับเครื่องรับจีพีเอส แสดงได้เป็น

$$\rho_k^{(j)} = f(x_u, y_u, z_u, t_u) \equiv f(\hat{x}_u + \Delta x_u, \hat{y}_u + \Delta y_u, \hat{z}_u + \Delta z_u, \hat{t}_u + \Delta t_u) \quad (4.3.1.4)$$

สมการระยะเสมือนข้างต้นสามารถขยายเทอมการประมาณค่าได้โดยใช้อนุกรมเทเลอร์

$$\begin{aligned} \rho_k^{(j)} &= f(\hat{x}_u + \Delta x_u, \hat{y}_u + \Delta y_u, \hat{z}_u + \Delta z_u, \hat{t}_u + \Delta t_u) \\ &= f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u) + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{x}_u}\Delta x_u + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{y}_u}\Delta y_u \\ &\quad + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{z}_u}\Delta z_u + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{t}_u}\Delta t_u + \cdots \end{aligned} \quad (4.3.1.5)$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะเทอมอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เทอมอนุพันธ์ย่อยแสดงได้เป็น

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{x}_u} = -\dfrac{(x_j - \hat{x}_u)}{\hat{d}_j} \quad ; \quad \dfrac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{z}_u} = -\dfrac{(z_j - \hat{z}_u)}{\hat{d}_j} \\ \dfrac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{y}_u} = -\dfrac{(y_j - \hat{y}_u)}{\hat{d}_j} \quad ; \quad \dfrac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{t}_u} = c \end{array}\right\} \quad (4.3.1.6)$$

โดยที่ $\hat{d}_j$ เป็นระยะระหว่างตำแหน่งดาวเทียมจีพีเอสและตำแหน่งประมาณของเครื่องรับจีพีเอส

$$\hat{d}_j = \sqrt{\left(x_j - \hat{x}_u\right)^2 + \left(y_j - \hat{y}_u\right)^2 + \left(z_j - \hat{z}_u\right)^2}$$

จากผลของสมการ (4.3.1.6) สมการระยะเสมือนตามสมการ (4.3.1.5) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{\rho}_k^{(j)} - \rho_k^{(j)} = h_x \Delta x_u + h_y \Delta y_u + h_z \Delta z_u - c\Delta t_u \qquad (4.3.1.7)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(x_j - x_u)}{\hat{d}_j} & \dfrac{(y_j - y_u)}{\hat{d}_j} & \dfrac{(z_j - z_u)}{\hat{d}_j} \end{bmatrix}^T$$

จากสมการข้างต้น เวกเตอร์ **h** เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้จากตำแหน่งประมาณของเครื่องรับจีพีเอสไปยังดาวเทียมจีพีเอส และ $\hat{r}$ เป็นระยะห่างเสมือระหว่างเครื่องรับจีพีเอสและดาวเทียมจีพีเอส

เมื่อพิจารณาดาวเทียมจีพีเอส จำนวน n ดวง สมการ (4.3.1.7) เขียนได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} \hat{\rho}_k^{(1)} - \rho_k^{(1)} &= h_x^{(1)} \Delta x_u + h_y^{(1)} \Delta y_u + h_z^{(1)} \Delta z_u - c\Delta t_u \\ &\vdots \\ \hat{\rho}_k^{(n)} - \rho_k^{(n)} &= h_x^{(n)} \Delta x_u + h_y^{(n)} \Delta y_u + h_z^{(n)} \Delta z_u - c\Delta t \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.1.8)$$

สมการข้างต้น จัดอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho}_k^{(1)} - \rho_k^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\rho}_k^{(n)} - \rho_k^{(n)} \end{bmatrix}_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} h_x^{(1)} & h_y^{(1)} & h_z^{(1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_x^{(n)} & h_y^{(n)} & h_z^{(n)} & 1 \end{bmatrix}_{(n\times 4)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c\Delta t_u \end{bmatrix}_{(4\times 1)} \qquad (4.3.1.9)$$

หรือ แสดงในรูปแบบของ

$$\Delta\boldsymbol{\rho} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{x} \qquad (4.3.1.10)$$

โดยที่

$$\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c\Delta t_u \end{bmatrix}, \qquad \Delta\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_k^{(1)} - \rho_k^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\rho}_k^{(n)} - \rho_k^{(n)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_x^{(1)} & h_y^{(1)} & h_z^{(1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_x^{(n)} & h_y^{(n)} & h_z^{(n)} & 1 \end{bmatrix}$$

ค่าความคาดเคลื่อนของเวกเตอร์สเตท $\Delta\mathbf{x}$ คำนวณได้จาก

$$\Delta\mathbf{x} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\Delta\boldsymbol{\rho} \tag{4.3.1.11}$$

และ เวกเตอร์สเตท $\mathbf{x}$ สามารถปรับค่าได้ตามสมการ

$$\mathbf{x}_{p+1} = \hat{\mathbf{x}}_p + \Delta\mathbf{x}_p \tag{4.3.1.12}$$

โดยที่ p เป็นช่วงเวลาหรืออิพอคที่พิจารณา

ค่าตำแหน่งของเครื่องรับ (หรือตำแหน่งของดาวเทียม) ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด สามารถนำไปใช้เป็นค่าเริ่มต้นให้กับตัวกรองประมาณค่า สำหรับประมาณค่าตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียม

๔.๓.๒ การประมาณค่า โดยตัวกรองประมาณค่า

ตัวกรองประมาณค่าที่พัฒนาขึ้นสำหรับงานวิจัยนี้เป็นตัวกรองคาลมาน ซึ่งจะทำการประมาณค่าตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียม โดยมีข้อกำหนดและสมมุติฐานเบื้องต้นดังนี้

1) ดาวเทียมที่พิจารณาเป็นดาวเทียมที่มีการวางตัวชี้มาที่โลก โดยมีลักษณะการหมุนรอบแกน Z เพื่อการทรงตัว หรือ มีลักษณะการทรงตัวแบบ 3 แกน
2) ดาวเทียมที่พิจารณาเป็นดาวเทียมที่มีลักษณะโครงสร้างในมิติ X เท่ากับมิติ Y โดยกำหนดให้ค่าสมาชิกมูลฐานของโมเมน $I_{xx} = I_{yy} = I_t$ = transverse inertia momentum และสมมุติให้ไม่มีเทอมที่ไข้วกันระหว่างมิติ
3) วงโคจรของดาวเทียมที่พิจารณาเป็นแบบวงกลม หรือ ใกล้เคียงวงกลม โดยอัตราการเคลื่อนที่ในเชิงมุมมีค่าคงที่

๔.๓.๒.๑ เวกเตอร์สเตท

เวกเตอร์สเตท $\mathbf{x}$ กำหนดได้ตามสมการ

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{r} & \mathbf{v} & \mathbf{b}\end{bmatrix}^T \tag{4.3.2.1}$$

โดยที่ $\mathbf{r} = \begin{bmatrix}x_u & y_u & z_u\end{bmatrix}^T$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำ ในระบบพิกัด ECI

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}v_x & v_y & v_z\end{bmatrix}^T$ เป็นเวกเตอร์ความเร็วของดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำ ในระบบพิกัด ECI

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}b & \dot{b}\end{bmatrix}^T$ เป็นเวกเตอร์ค่าเวลาออฟเซท และ อัตราการเปลี่ยนของเวลาออฟเซท

๔.๓.๒.๒ แบบจำลองระบบ

ในการพิจารณาระบบที่ต้องการประมาณหาเวคเตอร์ตำแหน่ง (**r**) และความเร็ว (**v**) ของดาวเทียม รวมไปถึงค่าเวลาความคาดเคลื่อนของระบบ (**b**) ฟังก์ชันแบบจำลองระบบ $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ ซึ่งถูกพิจารณารวมผลการรบกวนวงโคจรเนื่องจากศักย์โน้มถ่วงโลกและฝุ่นอวกาศ แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{r}} & \dot{\mathbf{v}} & \dot{\mathbf{b}}\end{bmatrix}^T \qquad (4.3.2.2)$$

โดยที่ $\dot{\mathbf{v}}\equiv\ddot{\mathbf{r}}=-\mu_{\oplus}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}+\mathbf{a}_{pr}$ ตามสมการ (4.1.1), $\dot{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{b}$

แบบจำลองไม่เป็นเชิงเส้นของระบบกำหนดได้ตามสมการ

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \ t)+\mathbf{w}(t) \qquad (4.3.2.3)$$

โดยที่ $\mathbf{w}(t)$ เป็นเวกเตอร์สัญญาณรบกวนของระบบ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และ
กำหนดให้ **Q** เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของระบบ

ค่าความแตกต่างระหว่างเวกเตอร์สเตทจริง **x** และ เวกเตอร์สเตทประมาณ $\hat{\mathbf{x}}$ ถูกกำหนดให้เป็นเวกเตอร์รบกวนสเตท (state perturbation) $\Delta\mathbf{x}$

$$\Delta\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t) \qquad (4.3.2.4)$$

เมื่อเวกเตอร์รบกวนสเตทข้างต้นถูกสมมุติให้มีค่าน้อยๆ ฟังก์ชันแบบจำลองระบบ $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ สามารถแสดงในรูปแบบของค่าประมาณได้ตามสมการ

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\approx\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}},t)+\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{x} \qquad (4.3.2.5)$$

โดยที่ **F** เป็นฟังก์ชันแบบจำลองระบบที่ถูกทำให้มีความเป็นเชิงเส้น

เมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ **Φ** (state transition matrix) พิจารณาได้จากการประมาณค่าในช่วงเวลาสั้นๆ

$$\mathbf{\Phi}\approx\mathbf{I}_{8\times8}+\mathbf{F}\Delta t \qquad (4.3.2.6)$$

โดยที่ $\Delta t=t_{(p+1)}-t_{(p)}$ และ เมทริกซ์ **F** คำนวณได้ตามสมการ

$$\mathbf{F}=\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]=\frac{\partial(\dot{\mathbf{r}} \;\; \dot{\mathbf{v}} \;\; \dot{\mathbf{b}})}{\partial(\mathbf{r} \;\; \mathbf{v} \;\; \mathbf{b})}=\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3\times 3} & \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{v}}\right)_{3\times 3} & \mathbf{O}_{3\times 2} \\ \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{r}}\right)_{3\times 3} & \mathbf{O}_{3\times 3} & \mathbf{O}_{3\times 2} \\ \mathbf{O}_{2\times 3} & \mathbf{O}_{2\times 3} & \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{b}}\right)_{2\times 2} \end{bmatrix} \quad (4.3.2.7)$$

โดยที่ $\mathbf{O}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์

จากการพิจารณาตามสมการข้างต้น แบบจำลองสเตทการรบกวนแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete state perturbation model) แสดงได้ตามสมการ

$$\Delta\mathbf{x}_{(p+1)} = \mathbf{\Phi}_{(p)}\Delta\mathbf{x}_{(p)} \quad (4.3.2.8)$$

๔.๓.๒.๓ แบบจำลองข้อมูลการวัด

แบบจำลองไม่เป็นเชิงเส้นของข้อมูลการวัดกำหนดได้ตามสมการ

$$\mathbf{z}=\mathbf{h}(\mathbf{x},t)+\mathbf{m}(t) \quad (4.3.2.10)$$

โดยที่ $\mathbf{h}(\mathbf{x},t)$ เป็นแบบจำลองไม่เป็นเชิงเส้นของเอาท์พุท

$\mathbf{m}(t)$ เป็นเวกเตอร์สัญญาณรบกวนของข้อมูลการวัด โดยมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และกำหนดให้ R เป็นตัวแปรสเกลาร์ของความแปรปรวนร่วม

กรณีข้อมูลการวัด : ระยะเสมือน

แบบจำลองไม่เป็นเชิงเส้นของข้อมูลการวัดระยะเสมือนแสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{h}(\mathbf{x},t)=\begin{bmatrix}\rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_j\end{bmatrix}^T \quad (4.3.2.10a)$$

ที่อิพอค p พิจารณาข้อมูลการวัดจากดาวเทียมจีพีเอสหนึ่งดวง ค่า $\delta\rho$ คำนวณได้จากค่าความแตกต่างระหว่างค่าระยะเสมือนที่วัดได้จริง ρ และ ค่าประมาณของระยะเสมือน $\hat{\rho}$ เมื่อพิจารณาข้อมูลการวัดจากดาวเทียมจีพีเอสทั้งหมดที่รับสัญญาณได้ ค่า $\delta\rho$ จะถูกบรรจุไว้ในเวกเตอร์ $\Delta\mathbf{r}_{(p)}$

กรณีข้อมูลการวัด : ผลต่างเฟส

แบบจำลองไม่เป็นเชิงเส้นของข้อมูลการวัดผลต่างเฟสแสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{h}(\mathbf{x},t)=\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_j \end{bmatrix}^T \tag{4.3.2.10b}$$

ที่อิพอค p พิจารณาข้อมูลการวัดจากดาวเทียมจีพีเอสหนึ่งดวง ค่า δr คำนวณได้จากค่าความแตกต่างระหว่างค่าระยะทางแตกต่างที่วัดได้จริง r และ ค่าประมาณของระยะทางแตกต่าง $\hat{r}$ เมื่อพิจารณาข้อมูลการวัดจากดาวเทียมจีพีเอสทั้งหมดที่รับได้ ค่า δr จะถูกบรรจุไว้ในเวกเตอร์ $\Delta\mathbf{r}_{(p)}$

แบบจำลองเชิงเส้นสำหรับเวกเตอร์ $\Delta\mathbf{r}$ แสดงได้ตามสมการ

$$\Delta\mathbf{r}_{(p)} = \mathbf{z}_{(p)} - \mathbf{h}_{(p)}(\hat{\mathbf{x}},t) = \mathbf{H}_{(p)}\Delta\mathbf{x}_{(p)} + \mathbf{m}_{(p)}(t) \tag{4.3.2.11}$$

โดยที่ $\mathbf{H}_{(p)}$ เป็นเมทริกซ์การวัด (observation matrix) คำนวณได้ตามสมการ

$$\mathbf{H}_{(p)} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}_{(p)}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \tag{4.3.2.12}$$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าความผิดพลาด $\mathbf{P}$ คำนวณได้ตามสมการ

$$\mathbf{P}_{(p)} = \left\langle \Delta\mathbf{x}\cdot\Delta\mathbf{x}^T \right\rangle \tag{4.3.2.13}$$

๔.๔ การคำนวณหาจำนวนลูกคลื่นพาห์ของข้อมูลการวัดเฟสแตกต่าง

เนื่องจากในงานวิจัยนี้ได้วางแผนในอนาคตที่จะนำเฟสแตกต่างสัญญาณคลื่นพาห์จีพีเอส มาใช้งานเป็นข้อมูลการวัด (อธิบายในหัวข้อ ๔.๓) เพื่อที่จะพัฒนาตัวกรองประมาณค่าสำหรับคำนวณหาตำแหน่งวงโคจร และ การวางตัวของดาวเทียม ดังนั้นเนื้อหาในส่วนนี้เป็นการอธิบายถึงพื้นฐานของวิธีการใหม่ในการคำนวณหาจำนวนลูกคลื่นพาห์ของข้อมูลการวัดเฟสแตกต่าง พร้อมกับการคำนวณหาค่าการวางตัวของดาวเทียม โดยต้องการเพียงข้อมูลการวัดเฟสแตกต่างสัญญาณจีพีเอสจำนวน 4 ข้อมูลที่วัดจากเบสไลน์สายอากาศ 2 เบสไลน์ (สายอากาศ 3 ชุด) ที่ไม่วางอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

วิธีการใหม่ที่นำเสนอมีขั้นตอนการประมวลผล 4 ขั้นตอน ดังนี้

๔.๔.๑ ขั้นตอนที่ ๑ การหาการวางตัวที่เป็นไปได้ของแต่ละเบสไลน์

จากข้อมูลการวัด (เฟสแตกต่าง) ที่รับจากแต่ละเบสไลน์ เราสามารถประยุกต์ใช้วิธีคณิตศาสตร์ Gram-Schmidt Orthonormalisation (GSO) สร้างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจำนวนสามเวกเตอร์ $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ให้ตั้งฉากซึ่งกันและกันได้ตามสมการ

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\dfrac{\mathbf{v}_1}{d_{11}} & \dfrac{\mathbf{v}_2}{d_{22}} & \dfrac{\mathbf{v}_3}{d_{33}}\end{bmatrix}^T \tag{4.4.1}$$

โดยที่ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ เป็นเซตของเวกเตอร์ (ขนาดไม่เท่ากับหนึ่งหน่วย) ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันได้ โดยแต่ละเวกเตอร์มีขนาดเท่ากับ d_{11}, d_{22} และ d_{33} ตามลำดับ

เวกเตอร์ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ สามารถคำนวณได้จากผลต่างของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้จากแต่ละเบสไลน์ไปยังดาวเทียมจีพีเอส 4 ดวง (4 เวกเตอร์) ซึ่งผลต่างดังกล่าวทำให้เกิดเวกเตอร์ผลต่างจำนวน 3 เวกเตอร์ที่ไม่มีความหมายใดๆเชิงกายภาพ แต่จะมีประโยชน์ในเชิงการคำนวณ

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta\mathbf{s}_R^{(1,2)} \\ \Delta\mathbf{s}_R^{(1,3)} - d_{21}\mathbf{v}_1 \\ \Delta\mathbf{s}_R^{(1,4)} - d_{32}\mathbf{v}_2 - d_{31}\mathbf{v}_1\end{bmatrix} \tag{4.4.2}$$

โดยที่ $\Delta\mathbf{s}_R^{(1,j)} = \mathbf{s}_R^{(1)} - \mathbf{s}_R^{(j)}$ และ j แสดงถึงหมายเลขของดาวเทียมจีพีเอส โดย j = 1, 2, 3 และ 4

ค่าของปริมาณสเกลาร์ d_{21}, d_{31}, d_{32} ในสมการข้างต้น คำนวณได้จาก

$$\begin{bmatrix}d_{21} \\ d_{31} \\ d_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta\mathbf{s}_R^{(1,3)} \cdot \left(\mathbf{v}_1 / d_{11}^2\right) \\ \Delta\mathbf{s}_R^{(1,4)} \cdot \left(\mathbf{v}_1 / d_{11}^2\right) \\ \Delta\mathbf{s}_R^{(1,4)} \cdot \left(\mathbf{v}_2 / d_{22}^2\right)\end{bmatrix} \tag{4.4.3}$$

ในเชิงกายภาพ เราทราบแต่เวกเตอร์เบสไลน์ในระบบพิกัดของตัวดาวเทียมเอง แต่เราไม่ทราบเวกเตอร์เบสไลน์ดังกล่าวในระบบพิกัดอ้างอิง เนื่องจากถ้าเราทราบ หมายถึงเราสามารถหาเมทริกซ์การวางตัวได้ หรือ อีกนัยหนึ่ง จำนวนลูกคลื่นที่ไม่ทราบจะถูกคำนวนและแก้ไขไปในการประมวลผล โดยไม่จำเป็นต้องทราบว่ามีค่าเท่าใด แต่จะได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์การวางตัว ซึ่งสามารถนำไปใช้ในแก้ไขข้อมูลการวัด (เฟสแตกต่าง) ให้ถูกต้องได้เลย

เวกเตอร์เบสไลน์ในระบบพิกัดอ้างอิง $\mathbf{b}_R$ สามารถแสดงในรูปแบบของสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\mathbf{b}_R = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \mu_3\mathbf{a}_3 \tag{4.4.4}$$

โดยที่ μ_1, μ_2, และ μ_3 เป็นค่าสัมประสิทธ์ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากผลคูณจุดระหว่างเวกเตอร์เบสไลน์ และ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สร้างโดย GSO

$$\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_R\\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_R\\ \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{b}_R\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\left(\mu_{10} + \Delta k^{(1,2)}\right)\Big/ d_{11}\\ \left(\mu_{20} + \Delta k^{(1,3)} - d_{21}\Delta k^{(1,2)}\right)\Big/ d_{22}\\ \left(\mu_{30} + \Delta k^{(1,4)} - d_{32}\Delta k^{(1,3)} - d_{30}\Delta k^{(1,2)}\right)\Big/ d_{33}\end{bmatrix} \tag{4.4.5}$$

โดยที่ $d_{30} = \left(d_{31} - d_{32}d_{21}\right)$ และ $\Delta k^{(i,j)}$ เป็นเซตของผลต่างของจำนวนลูกคลื่นซึ่งเราไม่ทราบค่า

สำหรับค่า $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{30}$ สามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{bmatrix}\mu_{10}\\ \mu_{20}\\ \mu_{30}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta\overline{r}_{RX}^{(1,2)}\\ \Delta\overline{r}_{RX}^{(1,3)} - d_{21}\Delta\overline{r}_{RX}^{(1,2)}\\ \Delta\overline{r}_{RX}^{(1,4)} - d_{32}\Delta\overline{r}_{RX}^{(1,3)} - d_{30}\Delta\overline{r}_{RX}^{(1,2)}\end{bmatrix} \tag{4.4.6}$$

โดยที่ $\Delta\overline{r}_{RX}^{(i,j)} = \overline{r}_{RX}^{(i)} - \overline{r}_{RX}^{(j)}$ เป็นผลต่างระหว่างข้อมูลการวัด (double differences of modulo path difference) ที่รับจากดาวเทียมจีพีเอสดวงที่ i และ ดวงที่ j แต่รับโดยเบสไลน์เดียวกัน

จากสมการ (4.4.4) ถ้าเราสามารถหาค่า μ_1, μ_2 และ μ_3 ได้ จะทำให้ทราบเวกเตอร์เบสไลน์ $\mathbf{b}_R$ ซึ่งหมายถึงเราสามารถหาเมทริกซ์การวางตัวของดาวเทียมได้ เนื่องจากเบสไลน์ถูกกำหนดอยู่บนดาวเทียม อย่างไรก็ตาม เซตของ $\Delta k^{(i,j)}$ เป็นอุปสรรคที่สำคัญที่จะต้องถูกสืบค้นว่ามีค่าเป็นจำนวนอะไร

ในการสืบค้นเพื่อหาค่า $\Delta k^{(i,j)}$ ค่าความยาวของเบสไลน์เป็นพารามิเตอร์ที่ถูกนำมาใช้ในการพิจารณา ตามสมการ

$$\left\|\mathbf{b}_R\right\| = l^2 = (\mu_1)^2 + (\mu_2)^2 + (\mu_3)^2 \tag{4.4.7}$$

โดยที่ l เป็นค่าความยาวของเบสไลน์

จากสมการข้างต้น ค่าสัมประสิทธิ์ μ_3 สามารถคำนวณได้จาก

$$\left(\mu_3\right)^2 = l^2 - \left(\mu_1\right)^2 - \left(\mu_2\right)^2 \tag{4.4.8}$$

ดังนั้น เราไม่จำเป็นที่จะต้องทำการสืบค้นจำนวนเต็มลูกคลื่นทั้งสามตัว เพียงแต่ทำการสืบค้นค่า $\Delta k^{(1,2)}$ และ $\Delta k^{(1,3)}$ ซึ่งเป็นการสืบค้นในสองมิติเท่านั้น

พิจารณาให้ค่าทดสอบ $\Delta\tilde{k}^{(1,2)}$ และ $\Delta\tilde{k}^{(1,3)}$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ μ_3^- ที่คาดไว้ มีค่าตามสมการ

$$\left(\mu_3^-\right)^2 = l^2 - \left(\tilde{\mu}_1\right)^2 - \left(\tilde{\mu}_2\right)^2 \tag{4.4.9}$$

เมื่อค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ μ_3^- คำนวณได้จากสมการข้างต้น ค่าจำนวนเต็มที่เป็นไปได้ของ $\Delta\tilde{k}^{(1,4)}$ ซึ่งมีสองค่า $\left(\Delta\tilde{k}_a^{(1,4)}, \Delta\tilde{k}_b^{(1,4)}\right)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (4.4.5) ดังนั้นสัมประสิทธิ์ μ_3^- ที่คาดไว้ จะถูกแก้ไขเพื่อให้มีความถูกต้องตามค่าที่ถูกต้องของ $\Delta\tilde{k}^{(1,4)}$

ค่าสัมประสิทธิ์ $\tilde{\mu}_3$ ที่ถูกต้อง คำนวณได้ตามสมการ

$$\tilde{\mu}_3 = \left(\mu_{30} + \Delta\tilde{k}^{(1,4)} - d_{32}\Delta\tilde{k}^{(1,3)} - d_{30}\Delta\tilde{k}^{(1,2)}\right)\Big/ d_{33} \tag{4.4.10}$$

ดังนั้นค่าประมาณของเวกเตอร์เบสไลน์ในระบบพิกัดอ้างอิง สามารถคำนวณได้ตามสมการ

$$\hat{\mathbf{b}}_R = \tilde{\mu}_1\mathbf{a}_1 + \tilde{\mu}_2\mathbf{a}_2 + \tilde{\mu}_3\mathbf{a}_3 \tag{4.4.11}$$

ค่าความยาวปรากฏ (apparent length) $\hat{l}$ ของเวกเตอร์เบสไลน์ที่ประมาณได้ คำนวณได้จาก

$$\hat{l} = \left\|\hat{\mathbf{b}}_R\right\| \equiv \sqrt{\left(\tilde{\mu}_1\right)^2 + \left(\tilde{\mu}_2\right)^2 + \left(\tilde{\mu}_3\right)^2} \tag{4.4.12}$$

ค่าสัมบูรณ์ความแตกต่างของความยาวเบสไลน์จริงและค่าประมาณ คำนวณได้จาก

$$g = \left|l - \hat{l}\right| \tag{4.4.13}$$

สำหรับแต่ละเบสไลน์ จะมีการทดสอบค่าจำนวนเต็มทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ $\Delta k^{(1,2)}$ และ $\Delta k^{(1,3)}$ โดยได้ผลลัพธ์เป็นรายชื่อลำดับ (list) ของค่าที่น่าจะเป็น โดยเรียงตามลำดับของค่า g

ซึ่งในกรณีนี้ เรากำหนดใช้เพียงสองเบสไลน์ เพื่อทำการหาเมทริกซ์การวางตัวของดาวเทียม ดังนั้นผลลัพธ์จากขั้นตอนที่หนึ่งนี้ จะเป็นรายชื่อลำดับของค่าที่น่าจะเป็นจำนวนสองชุด (List#1 สำหรับเบสไลน์ที่ 1 และ List#2 สำหรับเบสไลน์ที่ 2) โดยที่แต่ละรายชื่อลำดับ เราอาจจะระบุไว้ว่าบรรจุค่าที่เป็นไปได้ของ $\Delta k^{(1,2)}$ และ $\Delta k^{(1,3)}$ เป็นจำนวน N คู่

สังเกตได้ว่าการประมวลผลในขั้นตอนแรกไม่จำเป็นที่จะต้องสืบค้นค่า $\Delta k^{(i,j)}$ ในสามมิติ เนื่องจากสมการที่สร้างโดย GSO ซึ่งแสดงในรูปแบบของสมการเชิงวิเคราะห์ จะทำให้มิติของการสืบค้นลดลงมาเหลือเพียงแค่สองมิติ ซึ่งจุดนี้เป็นข้อดีของการนำ GSO มาประยุกต์ใช้สำหรับการแก้ปัญหาค่าจำนวนเต็มของเฟสแตกต่างของคลื่นพาห์

๔.๔.๒ ขั้นตอนที่ ๒ การหาคู่ที่เป็นไปได้ของเบสไลน์ประมาณ

จากการประมวลผลในขั้นตอนแรก การสืบค้นสำหรับแต่ละรายชื่อลำดับไม่ได้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างรายชื่อลำดับ ทำให้ในขั้นตอนที่สองจะเป็นการทดสอบเพื่อเลือกคู่ของเบสไลน์ที่มีความใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุด

พิจารณาในระบบพิกัดของดาวเทียม เบสไลน์จำลอง (virtual baseline) ถูกกำหนดโดยสมการ

$$\Delta \mathbf{b}_{(1,2)B} = \mathbf{b}_{1B} - \mathbf{b}_{2B} \tag{4.4.14}$$

ค่าความยาวของเบสไลน์จำลอง คำนวณได้จาก

$$l_{(1,2)} = \left\| \Delta \mathbf{b}_{(1,2)B} \right\| = \left\| \mathbf{b}_{1B} - \mathbf{b}_{2B} \right\| \tag{4.4.15}$$

พิจารณาจับคู่เบสไลน์ประมาณ โดยเลือกมาจากรายชื่อลำดับ (list) ละหนึ่งเบสไลน์ เพื่อสร้างเบสไลน์จำลองในระบบพิกัดอ้างอิง ตามสมการ

$$\Delta \hat{\mathbf{b}}_{(1,2)R} = \hat{\mathbf{b}}_{1R} - \hat{\mathbf{b}}_{2R} \tag{4.4.16}$$

และค่าความยาวของเบสไลน์จำลองดังกล่าวในระบบพิกัดอ้างอิง คำนวณได้จาก

$$\hat{l}_{(1,2)} = \left\| \Delta \hat{\mathbf{b}}_{(1,2)R} \right\| = \left\| \hat{\mathbf{b}}_{1R} - \hat{\mathbf{b}}_{2R} \right\| \tag{4.4.17}$$

ดังนั้นการทดสอบในขั้นตอนนี้สามารถดำเนินการได้โดยอาศัยการทดสอบค่าความยาวของเวกเตอร์เบสไลน์จำลองที่อยู่ในระบบพิกัดตัวดาวเทียม ($l_{(1,2)}$)และ เวกเตอร์เบสไลน์จำลองที่อยู่ในระบบพิกัดอ้างอิง ($\hat{l}_{(1,2)}$) พร้อมกับนำเงื่อนไขการทดสอบในขั้นตอนแรกของทั้งสองเบสไลน์มาร่วมทดสอบด้วย โดยค่าการคำนวณโดยรวม (ε) แสดงได้ตามสมการ

$$\varepsilon = \left| l_1 - \hat{l}_1 \right| + \left| l_2 - \hat{l}_2 \right| + \left| l_{(1,2)} - \hat{l}_{(1,2)} \right| \qquad (4.4.18)$$

ถ้าจำนวนลำดับของแต่ละรายชื่อในขั้นตอนที่หนึ่งมีจำนวนเป็น 10 ดังนั้นจำนวนคู่ของเบสไลน์ที่ถูกเลือกมารายชื่อละหนึ่งเบสไลน์ $\left\{ \hat{\mathbf{b}}_{1R}^{(a^{th})}, \hat{\mathbf{b}}_{2R}^{(b^{th})} \right\}$ ที่จะต้องถูกทดสอบจะมีค่าเป็น 100

เมื่อจำนวนคู่ของเบสไลน์ถูกทดสอบ ค่า ε จะถูกนำมาใช้ในการจัดเรียงลำดับของคู่ของเบสไลน์ที่น่าจะเป็นมากที่สุด พร้อมกับสร้างรายชื่อลำดับที่สาม (List#3)ขึ้น โดยจะถูกเรียกว่า “รายชื่อคู่ของเบสไลน์ที่น่าจะเป็นมากที่สุด”

๔.๔.๓ ขั้นตอนที่ ๓ การคำนวณหาเมทริกซ์การวางตัว

หนึ่งในคู่เบสไลน์จาก List#3 (ที่ได้จากขั้นตอนที่สอง) จะเป็นคู่เบสไลน์ที่ใกล้เคียงคำตอบมากที่สุด ซึ่งขบวนการเพื่อให้ได้มาซึ่งคู่เบสไลน์ดังกล่าวจะต้องมีการคำนวณหาจำนวนเต็มของลูกคลื่นพาห์เสียก่อนดังที่ได้นำเสนอในขั้นตอนที่ ๑ อย่างไรก็ตาม เวกเตอร์เบสไลน์ประมาณดังกล่าวอาจจะผิดพลาดไป เนื่องจากสัญญาณรบกวน หรือ จากสัญญาณมัลติพาร์ท หรือ จากไบอัสที่ไม่ทราบค่าในระบบ

ดังนั้นเพื่อทำให้คู่เบสไลน์ดังกล่าวสามารถถูกระบุหรือถูกเลือกจากรายชื่อลำดับได้อย่างถูกต้อง จำเป็นที่จะต้องคำนวณหาค่าประมาณของการวางตัวของคู่เบสไลน์ดังกล่าว ซึ่งก็คือการหาการวางตัวของดาวเทียมนั่นเอง โดยค่าประมาณของเมทริกซ์การวางตัว ($\hat{\mathbf{A}}$) จะถูกคำนวณจากแต่ละคู่เบสไลน์ของ List#3 พร้อมกับทำการทดสอบหาความน่าจะเป็นโดยรวม หรือ ฟังก์ชันจุดประสงค์ (cost function : J) ที่อยู่ในรูปแบบของกำลังสองน้อยที่สุดสามารถคำนวณได้จาก [Wahba, 1965]

$$J = \sum_{i=1}^{m} \left\| \mathbf{b}_{iB} - \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{b}}_{iR} \right\|^2 \qquad (4.4.19)$$

โดยที่ m เป็นจำนวนเบสไลน์

เมื่อฟังก์ชันจุดประสงค์ J ถูกคำนวณสำหรับแต่ละคู่เบสไลน์ รายชื่อลำดับที่สี่ (List#4) จะถูกสร้างขึ้นโดยมีการจัดเรียงลำดับตามค่าของ J จากน้อยไปมาก ซึ่งคู่เบสไลน์ที่ให้ค่า J น้อยที่สุด น่าจะเป็นคำตอบที่ใกล้เคียงกับการวางตัวจริงๆมากที่สุด

สำหรับการคำนวณหาเมทริกซ์การวางตัว ($\hat{\mathbf{A}}$) ตามสมการ (4.4.19) นั้น โดยทั่วไปจะใช้เวกเตอร์การวัดที่พิจารณาในระบบพิกัดของตัวดาวเทียมจำนวนมากกว่าสองเวกเตอร์ อย่างไรก็ตาม มีวิธีการที่สามารถทำให้คำนวณหาเมทริกซ์การวางตัวดังกล่าวจากเวกเตอร์การวัดเพียงสองเวกเตอร์ โดยใช้วิธีทางพีชคณิต ดังแสดงใน [Wertz, 1997] อย่างไรก็ตามวิธีทางพีชคณิตดังกล่าวมีข้อด้อยอยู่สองประการ อันได้แก่ การถ่วงค่าที่ไม่เท่ากัน และ สามารถใช้ได้เพียงสองเวกเตอร์สำหรับแต่ละช่วงเวลา

ดังนั้นในการคำนวณหาเมทริกซ์การวางตัว ($\hat{\mathbf{A}}$) สำหรับงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้ QUEST method [Shuster and Oh, 1981] ซึ่งโดยหลักการพื้นฐานแล้วแก้ข้อด้อยทั้งสองประการของวิธีทางพีชคณิต

๔.๔.๔ ขั้นตอนที่ ๔ การทดสอบเชิงต่อเนื่อง

จากเทคนิคทั้งหมดที่นำเสนอสามารถสรุปได้เป็นวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood) ซึ่งมีความเป็นไปได้สูงมากที่ตัวเลือกแรกของ List#4 จะเป็นคำตอบที่ถูกต้อง อย่างไรก็ตาม เนื่องจากความผิดพลาดของข้อมูลการวัด หรือ รูปทรงเรขาคณิตของกลุ่มดาวเทียมจีพีเอสที่เลือกอาจจะส่งผลให้ตัวเลือกแรกของ List#4 ไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้อง แต่เราสามารถคาดการณ์ได้ว่าคำตอบที่ถูกต้องดังกล่าว จะเป็นตัวเลือกที่อยู่ในลำดับต้นๆของ List#4

ดังนั้นในการที่จะแยกแยะคำตอบที่ถูกต้องจากคำตอบที่ไม่ถูกต้อง ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ J ที่คำนวณได้อาจจะเป็นตัวบ่งชี้ได้ในระดับหนึ่ง โดยถ้าค่า J ดังกล่าวของสองตัวเลือกแรกของ List#4 มีค่าแตกต่างกันอย่างชัดเจน ความเป็นไปได้สูงมากที่ตัวเลือกแรกจะเป็นคำตอบที่ถูกต้อง อย่างไรก็ตามค่าอัตราส่วนระหว่างค่า J ของสองตัวเลือกแรกของ List#4 อาจจะไม่สามารถใช้ได้กับชุดข้อมูลการวัดที่ต่างชุดกัน ดังนั้นค่าอัตราส่วนดังกล่าวไม่สามารถที่จะถูกกำหนดให้ใช้ในการระบุตัวเลือกที่ให้คำตอบที่ถูกต้องได้ แต่ค่าอัตราส่วนดังกล่าวอาจจะถูกนำมาใช้ในการแยกแยะกลุ่มตัวเลือกลำดับต้นๆของ List#4 สำหรับแต่ละช่วงเวลาได้ ซึ่งการแยกแยะในลักษณะกลุ่มตัวเลือกดังกล่าว จะถูกพิจารณาอย่างต่อเนื่องในการประมวลผลในช่วงเวลาถัดไป อาจจะเป็น 10 อิพลอค หรือ มากกว่านั้น จนกว่าจะพบความแตกต่างอย่างชัดเจนระหว่างตัวเลือกภายในกลุ่มดังกล่าว